Teoria	**Es. 1**	**Es. 2**	**Totale**

Analisi e Geometria 1 **Prima prova in itinere** **13 Novembre 2017 Compito F**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi: Teoria: 8=4+4; Esercizio 1: 8 = 2+2+2+2; Esercizio 2: 14 = 4 + 4 + 2 + 4.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo o sul retro del foglio. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

Teoria

A) Scrivere con precisione la definizione di: funzione *continua* in un punto.

B) Enunciare con precisione e dimostrare il teorema che afferma che la derivabilità implica la continuità. *(Scrivere qui sotto e sul retro di questo foglio).*

Esercizi

(Le risposte devono essere motivate e poi riportate nelle caselle)

1. (a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, 1 \leq |z| \leq 2\,,\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3} \right\}$$
$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \,:\, w = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \quad \text{con } z \in A \right\}.$$

Risposta. Insieme A	*Risposta.* Insieme B

(b) Scrivere in forma algebrica ($z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$) tutti i numeri complessi z che soddisfano l'equazione

$$\left(z + \frac{i}{2} \right)^3 = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^3 \tag{1}$$

Risposta. Le soluzioni, in forma algebrica, dell'equazione (1) sono:

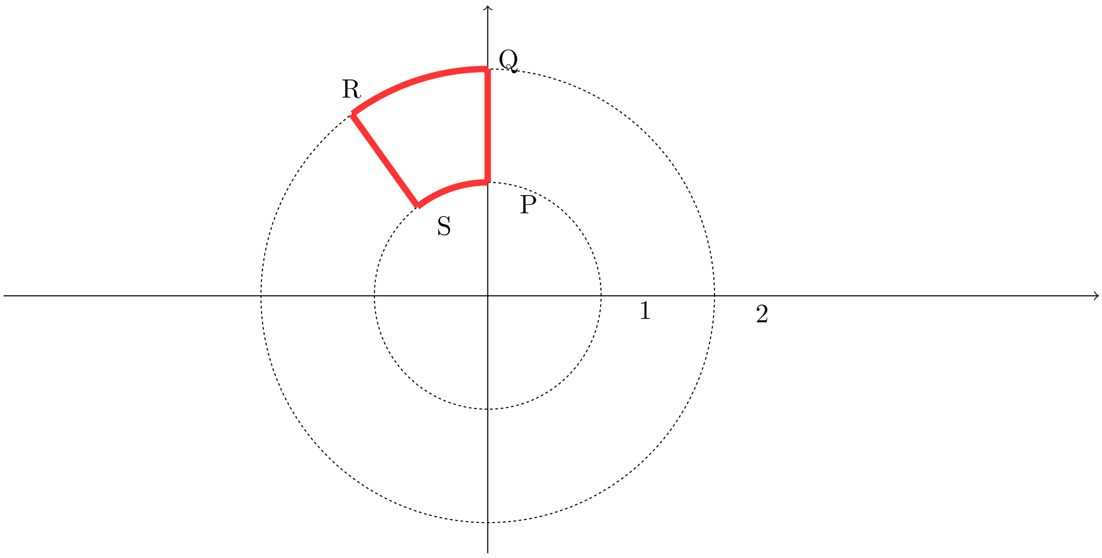
(c) Determinare la forma esponenziale $re^{i\vartheta}$ di $1/\bar{z}$ ($\bar{z}$ denota il coniugato di z), dove $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Forma esponenziale $re^{i\vartheta}$ di $\dfrac{1}{\bar{z}}$: $\qquad r = \qquad \vartheta =$

Soluzione

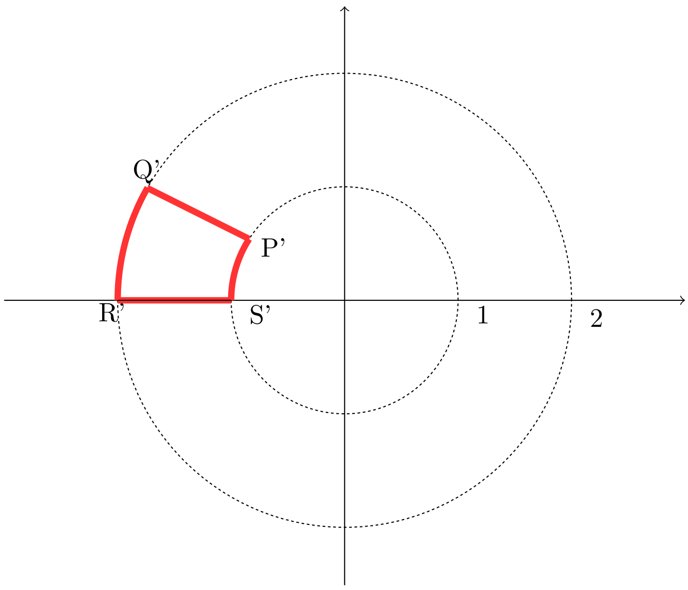
(a) Insieme A:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ 1 \le |z| \le 2 \, , \ \frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{2\pi}{3} \right\}$$



L'insieme A è tutta la regione delimitata dai due segmenti PQ e RS e dai due archi QR e SP, incluso il bordo.
Poiché $w_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ è un numero complesso di modulo 1 e di argomento $\theta = \frac{\pi}{3}$, l'insieme $B = w_0 \, A$ si ottiene ruotando l'insieme A attorno all'origine di un angolo $\theta = \frac{\pi}{3}$, in senso antiorario. Pertanto, si ha

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ 1 \le |z| \le 2 \, , \ \frac{5\pi}{6} \le \arg z \le \pi \right\}$$



(b) Poiché

$$\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^3 = \left(\frac{(1-i)^2}{2} \right)^3 = (-i)^3 = i$$

si tratta di risolvere l'equazione

$$\left(z + \frac{i}{2} \right)^3 = i \, .$$

Poiché le radici cubiche di i sono $-i$, $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i$ le soluzioni dell'equazione precedente sono

$$
\begin{array}{lcl}
z+\dfrac{i}{2}=-i & \text{ossia} & z=-\dfrac{i}{2}-i=-\dfrac{3}{2}\,i \\
z+\dfrac{i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\,i & \text{ossia} & z=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\
z+\dfrac{i}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-+\dfrac{1}{2}\,i & \text{ossia} & z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,.
\end{array}
$$

Pertanto, si ha

$$C=\left\{-\frac{3}{2}\,i\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

(c) Se $z=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, la forma esponenziale di $1/\bar{z}$ è $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^x \sqrt[3]{1 - \frac{x^2}{9}} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Determinare i limiti di f a $-\infty$ e $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

(b) Determinare i punti di massimo e di minimo locali (Si intende: le ascisse dei punti di massimo e di minimo locali sull'asse delle x, non le corrispondenti ordinate).

Punti di minimo locali:	Punti di massimo locali:

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni sopra ottenute. (Non è richiesto lo studio della derivata seconda).

(d) Determinare lo sviluppo di Maclaurin (centrato in $x_0 = 0$) di f al 2° ordine e quindi dedurne il valore di $f^{''}(0)$.

Sviluppo di Maclaurin: $f(x) =$	$f''(0) =$

Soluzione

(a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$. Il segno di $f(x)$ coincide con il segno del radicando $\left(1-\frac{x^2}{9}\right)$. Quindi $f(x) > 0$ per $x \in (-3,3)$, e $f(x) < 0$ per $x \in (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$.

(b) La funzione e^x è derivabile su $\mathbb{R}$ e la funzione $\sqrt[3]{1-\frac{x^2}{9}}$ è derivabile per ogni $x \neq \pm 3$. Quindi f è sicuramente derivabile in ogni punto diverso da ± 3, con derivata uguale a

$$\frac{e^x}{9}\,\frac{\left(-x^2-\frac{2}{3}x+9\right)}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^2}}$$

Nei punti $-3, 3$, invece, f non è derivabile. (Per $x \to -3, 3$, i limiti di $f'(x)$ non sono finiti). La derivata $f'(x)$, per $x \neq -3, 3$ è:

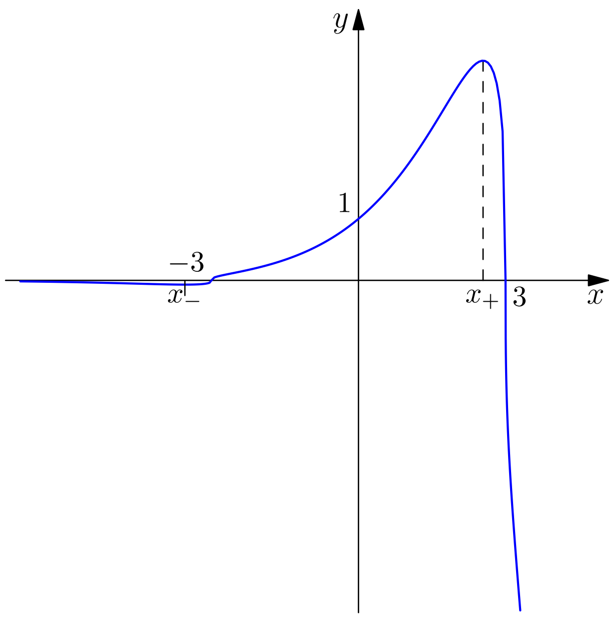
$$f'(x) = \frac{e^x(-x^2-\frac{2}{3}x+9)}{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

La derivata $f'(x)$ si annulla quando $-x^2-\frac{2}{3}x+9=0$, ossia nei punti:

$$x_- = -\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{82}}{3} \qquad\qquad x_+ = -\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{82}}{3}$$

Quindi f ha un punto di minimo locale in x_- e un punto di massimo locale in x_+.
Allo scopo di disegnare un grafico qualitativo, si noti che $x_- < -3$ e $x_+ < 3$.

(c) Grafico di $f(x) = e^x\sqrt[3]{1-\frac{x^2}{9}}$



(d) Gli sviluppi locali in $x_0 = 0$ di e^x e di $\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$ sono:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)\,, \qquad \left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{27}x^2 + o(x^2)$$

Quindi:

$$f(x) = \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1-\frac{1}{27}x^2+o(x^2)\right) = 1 + x + \frac{25}{54}x^2 + o(x^2)$$

Ne segue che

$$\frac{f''(0)}{2!} = \frac{25}{54}, \qquad\qquad f''(0) = 2!\frac{25}{54} = \frac{25}{27}$$