Teoria	Es. 1	Es. 2	Totale

Analisi e Geometria 1 Prima prova in itinere 13 Novembre 2017 Compito E	Docente:	Numero di iscrizione all'appello:
Cognome:	Nome:	Matricola:

Punteggi: Teoria: 8=4+4; Esercizio 1: 8 = 2+2+2+2; Esercizio 2: 14 = 4 + 4 + 2 + 4.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo o sul retro del foglio. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

Teoria

A) Scrivere con precisione la definizione di: funzione *derivabile* (o *differenziabile*) in un punto.

B) Enunciare con precisione e dimostrare il teorema sulla convergenza delle successioni monotòne. *(Scrivere qui sotto e sul retro di questo foglio).*

Esercizi

(Le risposte devono essere motivate e poi riportate nelle caselle)

1. (a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \; : \; 1 \leq |z| \leq 2 \, , \; \frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$
$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \; : \; w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) z \quad \text{con } z \in A \right\} .$$

Risposta. Insieme A

Risposta. Insieme B

(b) Scrivere in forma algebrica ($z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$) tutti i numeri complessi z che soddisfano l'equazione

$$\left(z - \frac{i}{2} \right)^3 = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^3 \tag{1}$$

Risposta. Le soluzioni, in forma algebrica, dell'equazione (1) sono:

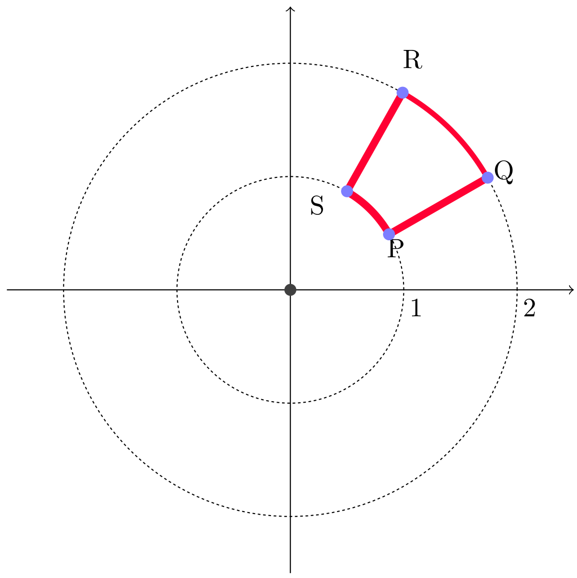
(c) Determinare la forma esponenziale $re^{i\vartheta}$ di $1/\bar{z}$ ($\bar{z}$ denota il coniugato di z), dove $z = 3\, e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Forma esponenziale $re^{i\vartheta}$ di $\dfrac{1}{\bar{z}}$: $\qquad r = \qquad \qquad \vartheta =$

Soluzione

(a) Insieme A:

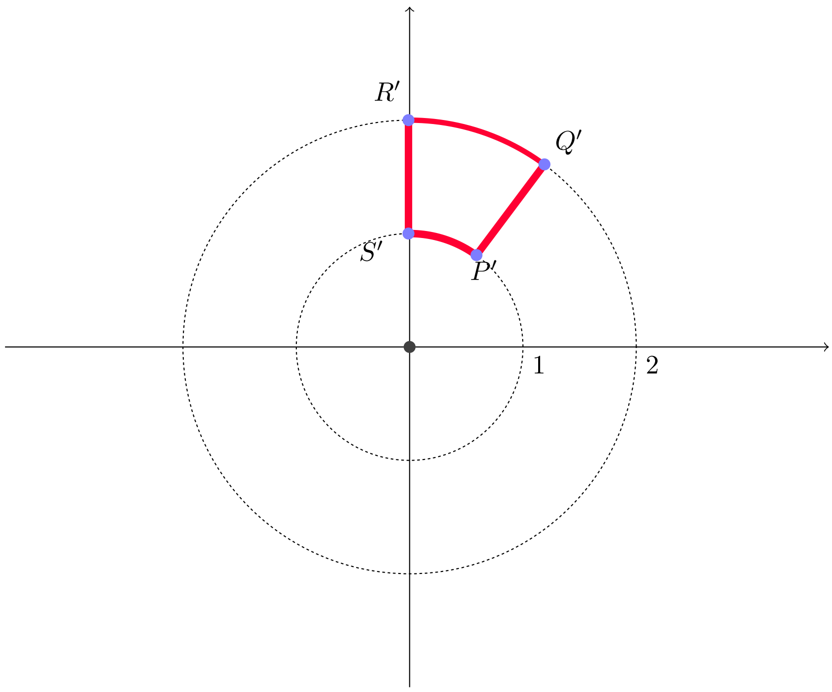
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;:\; 1 \leq |z| \leq 2 \,,\; \frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$



L'insieme A è tutta la regione delimitata dai due segmenti PQ e RS e dai due archi QR e SP, incluso il bordo.

Poiché $w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ è un numero complesso di modulo 1 e di argomento $\theta = \frac{\pi}{6}$, l'insieme $B = w_0\,A$ si ottiene ruotando l'insieme A attorno all'origine di un angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$, in senso antiorario. Pertanto, si ha

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \;:\; 1 \leq |z| \leq 2 \,,\; \frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$



(b) Poiché

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^3 = (i)^3 = -i$$

si tratta di risolvere l'equazione

$$\left(z - \frac{i}{2}\right)^3 = -i\,.$$

Poiché le radici cubiche di $-i$ sono i , $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i$, $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i$ le soluzioni dell'equazione precedente sono

$$z-\frac{i}{2}=\mathrm{i} \qquad \text{ossia} \qquad z=\frac{i}{2}+i=\frac{3}{2}\,i$$

$$z-\frac{i}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i \qquad \text{ossia} \qquad z=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z-\frac{i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i \qquad \text{ossia} \qquad z=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Pertanto, si ha

$$C=\left\{\frac{3}{2}\,i\,,\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\,.$$

(c) Se $z=3\,e^{i\frac{\pi}{6}}$, la forma esponenziale di $1/\bar{z}$ è $\frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2. Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^x \sqrt[3]{1 - \frac{x^2}{4}} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Determinare i limiti di f a $-\infty$ e $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

(b) Determinare i punti di massimo e di minimo locali (Si intende: le ascisse dei punti di massimo e di minimo locali sull'asse delle x, non le corrispondenti ordinate).

Punti di minimo locali:	Punti di massimo locali:

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni sopra ottenute. (Non è richiesto lo studio della derivata seconda).

(d) Determinare lo sviluppo di Maclaurin (centrato in $x_0 = 0$) di f al 2° ordine e quindi dedurne il valore di $f^{''}(0)$.

Sviluppo di Maclaurin: $f(x) =$	$f''(0) =$

SOLUZIONE

(a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$. Il segno di $f(x)$ coincide con il segno del radicando $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$. Quindi $f(x) \geq 0$ per $x \in (-2, 2)$, e $f(x) \leq 0$ per $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

(b) La funzione e^x è derivabile su $\mathbb{R}$ e la funzione $\sqrt[3]{1 - \frac{x^2}{4}}$ è derivabile per ogni $x \neq \pm 2$. Quindi f è sicuramente derivabile in ogni punto diverso da ± 2, con derivata uguale a

$$\frac{e^x}{4} \frac{\left(-x^2 - \frac{2}{3}x + 4\right)}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2}}$$

Nei punti $-2, 2$, invece, f non è derivabile. (Per $x \to -2, 2$, i limiti di $f'(x)$ non sono finiti).
La derivata $f'(x)$, per $x \neq -2, 2$ è:

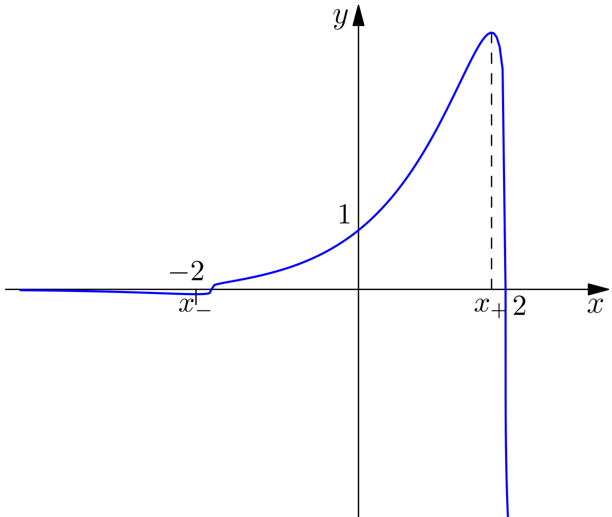
$$f'(x) = \frac{e^x(-x^2 - \frac{2}{3}x + 4)}{9\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

La derivata $f'(x)$ si annulla quando $-x^2 - \frac{2}{3}x + 4 = 0$, ossia nei punti:

$$x_- = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{37}}{3} \qquad\qquad x_+ = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{37}}{3}$$

Quindi f ha un punto di minimo locale in x_- e un punto di massimo locale in x_+.
Allo scopo di disegnare un grafico qualitativo, si noti che $x_- < -2$ e $x_+ < 2$.

(c) Grafico di $f(x) = e^x \sqrt[3]{1 - \frac{x^2}{4}}$



(d) Gli sviluppi locali in $x_0 = 0$ di e^x e di $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ sono:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)\,, \qquad \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}\frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

Quindi:

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)\right) = 1 + x + \frac{5}{12}x^2 + o(x^2)$$

Ne segue che

$$\frac{f''(0)}{2!} = \frac{5}{12}, \qquad f''(0) = 2!\frac{5}{12} = \frac{5}{6}$$