T.(a)	T.(b)	Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Secondo Appello** **16 Luglio 2018**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Prima parte

T.(a) (4 Punti) Enunciare e dimostrare il Teorema degli Zeri.

T.(b) (4 Punti) Sia $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ un vettore non nullo. Dimostrare che ogni vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico come $\mathbf{a} = \mathbf{P_b}(\mathbf{a}) + \mathbf{a}_\perp$ dove $\mathbf{P_b}(\mathbf{a})$ (la proiezione di $\mathbf{a}$ lungo $\mathbf{b}$) è multiplo di $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a}_\perp$ è ortogonale a $\mathbf{b}$. Trovare l'espressione di $\mathbf{P_b}(\mathbf{a})$.

Seconda parte

Punteggi degli esercizi: Es.1: 9; Es.2: 4, Es.3: 5, Es.4: 4.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{1 - x\mathrm{e}^{-x^2}}\,.$$

(a) Calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$. Tracciare il grafico qualitativo di f.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

Grafico qualitativo:

(b) Calcolare la derivata prima di f e trovare i punti di minimo locale e di massimo locale di f.

Derivata prima:

Punti di minimo o massimo locale:

(c) Esiste finito l'integrale (in senso generalizzato) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$?

Soluzione.

(a) e (b). Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{1 - x\mathrm{e}^{-x^2}} = 0\,.$$

Pertanto, la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to \pm\infty$.

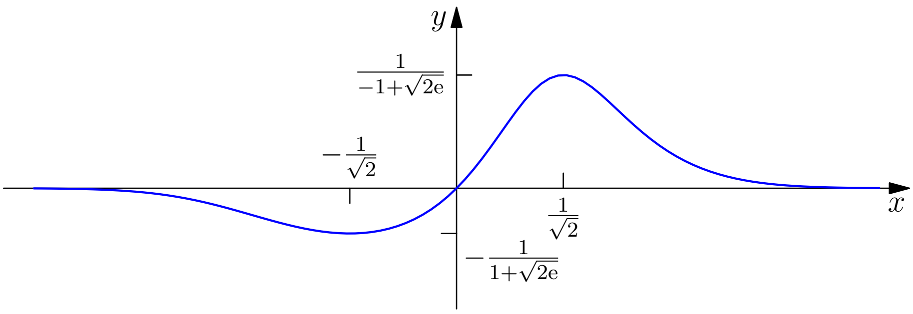
La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{(1-2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}}{(1 - x\mathrm{e}^{-x^2})^2}\,.$$

Il segno di f' coincide con il segno di $1 - 2x^2$. Quindi $f'(x) = 0$ per $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) > 0$ per $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, e $f'(x) < 0$ per $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Di conseguenza, la funzione f è strettamente crescente per $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ed è strettamente decrescente per $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e per $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Inoltre, $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ è un punto di minimo (assoluto) e $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è un punto di massimo (assoluto) per la funzione f.

Il grafico di f è



(c) Si tratta di stabilire il carattere dell'integrale improprio

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{1 - x\mathrm{e}^{-x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Per fare questo, si deve stabilire l'integrabilità in senso improprio di f a $+\infty$ e a $-\infty$ (separatamente). La funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$ ed positiva su $[1,+\infty)$ e negativa su $(-\infty,-1]$. Inoltre, si ha

$$f(x) \sim x\mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{per } x \to \pm\infty\,.$$

Poiché l'esponenziale e^{x^2} è un infinito di ordine superiore rispetto a ogni potenza x^α per $x \to \pm\infty$, ne segue che la funzione $x\mathrm{e}^{-x^2}$ è integrabile in senso improprio sia a $+\infty$ sia a $-\infty$. Di conseguenza, grazie al criterio del confronto asintotico, anche la funzione f è integrabile in senso improprio sia a $+\infty$ sia a $-\infty$, e quindi su tutto $\mathbb{R}$.

2. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin del secondo ordine, con il resto nella forma di Peano, della funzione:

$$g(x) = (1+x)\mathrm{e}^x - (1-x)\cos x - x\sqrt[3]{1+x}\,.$$

Risposta: $\boxed{}$

Soluzione.

Poiché si hanno gli sviluppi di MacLaurin

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\sqrt[3]{1+x} &= 1 + \frac{x}{3} + o(x)\,,
\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)\mathrm{e}^x - (1-x)\cos x - x\sqrt[3]{1+x} \\
&= (1+x)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - (1-x)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x\left(1 + \frac{x}{3} + o(x)\right) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x + x^2 + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2)\right) - x - \frac{x^2}{3} + o(x^2) \\
&= 2x + \frac{5}{3}\,x^2 + o(x^2)\,.
\end{aligned}$$

3. Determinare il parametro reale α in modo che le due rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 3 - u \\ y = \alpha + u \\ z = 1 + u \end{cases}$$

siano incidenti in un punto P. $\boxed{}$

Per i valori di α trovati, determinare l'equazione del piano $\mathcal{P}$ che include le rette r ed s.

$\boxed{}$

Soluzione.

Vettori direttori delle rette r ed s sono rispettivamente $\mathbf{a} = (3, -1, -2)$ e $\mathbf{b} = (-1, 1, 1)$. Le due rette, quindi, non possono mai essere parallele. L'eventuale punto di intersezione si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} 1 + 3t = 3 - u \\ 3 - t = \alpha + u \\ 1 - 2t = 1 + u \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ottiene $u = -2t$. Sostituendo nella prima equazione, si ha $3t = 2 + 2t$, ossia $t = 2$. Quindi si ha $u = -4$ e, dalla seconda equazione, si ha $3 - 2 = \alpha - 4$, ossia $\alpha = 5$. Pertanto, per $\alpha = 5$, si ha il punto $P = r \cap s \equiv (7, 1, -3)$.

Il piano π che contiene le rette r ed s può essere visto come il piano passante per il punto P e avente direzione normale data dal vettore $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (1, -1, 2)$. Pertanto, si ha

$$\pi \; : \; 1 \cdot (x - 7) - 1 \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z + 3) = 0$$

ossia $\pi \; : \; x - y + 2z = 0$.

4. Calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$$

lungo la curva parametrizzata $\gamma : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, definita in questo modo:

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t \cos t \\ y(t) = \mathrm{e}^t \sin t \\ z(t) = \mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in [0,\pi].$$

Risposte.

Elemento di lunghezza ds della curva:

Integrale definito da calcolare:

Valore numerico dell'integrale:

Soluzione.

Da $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\mathrm{e}^t\cos t, \mathrm{e}^t \sin t, \mathrm{e}^t)$, si ricava

$$\begin{cases} x' = \mathrm{e}^t\cos t - \mathrm{e}^t \sin t \\ y' = \mathrm{e}^t \sin t + \mathrm{e}^t \cos t \\ z' = \mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in [0,\pi],$$

Quindi

$$ds = \|\gamma'(t)\|\,dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^t$$

,

L'integrale di linea $I = \int_\gamma x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds$ è

$$I = \int_0^\pi x(t)\sqrt{x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2}\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{6}\int_0^\pi \mathrm{e}^{3t}\cos t\,\mathrm{d}t\,.$$

Integrando per parti, si ha

$$\int \mathrm{e}^{3t}\cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{3t}\sin t - 3\int \mathrm{e}^{3t}\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{3t}\sin t + 3\mathrm{e}^{3t}\cos t - 9\int \mathrm{e}^{3t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

da cui si ha

$$\int \mathrm{e}^{3t}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{3t}}{10}(\sin t + 3\cos t) + c\,.$$

Pertanto, si ha

$$I = \sqrt{6}\left[\frac{\mathrm{e}^{3t}}{10}(\sin t + 3\cos t)\right]_0^\pi = -\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\left(\mathrm{e}^{3\pi}+1\right).$$