Analisi e Geometria 1 Primo Appello 12 febbraio 2018 Compito G	Docente:	Numero di iscrizione all'appello:
Cognome:	Nome:	Matricola:

Prima parte

Scrivere le risposte ai due seguenti quesiti A e B su questa facciata e sul retro di questo foglio.

A. Enunciare e dimostrare il teorema sulle funzioni con derivata nulla su un intervallo. (3 punti)

B. Scrivere la definizione di *curvatura* di una curva parametrizzata alla lunghezza d'arco. (3 punti)

Seconda parte

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 ; Es.2: 8 ; Es.3: 4; Es.4: 6.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere* **motivate** *e* **riportate nelle caselle**. *Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

Esercizio 1. *(a) Trovare le radici quarte complesse di $z = 1 + i\sqrt{3}$ e scriverle nella forma esponenziale $re^{i\vartheta}$, con $0 \le \vartheta < 2\pi$.*

Risposta:

(b) Si consideri la trasformazione del piano complesso:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{T} \mathbb{C}, \qquad T(z) = \frac{2}{1-i}\, z$$

Poniamo $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le 1\}$. Dire cos'è D, disegnare D sul piano di Gauss e trovare l'area di $T(D) = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in \mathbb{C} \quad w = T(z)\}$.

Disegno di D: *Cos' è D?* Risposta: *Area di $T(D)$:*

Soluzioni

(a) Scriviamo $z = 1 + i\sqrt{3}$ in forma trigonometrica. Abbiamo

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Le radici quarte di $z = 1 + i\sqrt{3}$ sono i quattro numeri complessi dati dalla formula:

$$\zeta_k = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\right] \text{ per } k = 0,1,2,3\,.$$

Dunque

$$\zeta_0 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right],\ \zeta_1 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right],$$

$$\zeta_2 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right],\ \zeta_3 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right].$$

(b) Se z e z_0 sono due numeri complessi, il modulo della differenza $|z - z_0|$ è la *distanza* tra z e z_0. Quindi $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le 1\}$ è l'insieme di tutti numeri complessi la cui distanza da $z_0 = 1$ è minore o uguale a 1, ossia è il cerchio di centro 1 (ossia di centro $(1,0)$) e raggio 1 (bordo incluso).

(c) Poiché il numero $\frac{2}{1-i} = 1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$, la trasformazione T è una rotazione, seguita da una dilatazione di $\sqrt{2}$. La rotazione non altera le aree, mentre la dilatazione di un fattore $\sqrt{2}$ altera le aree per un fattore $(\sqrt{2})^2 = 2$. Allora, poiché l'area del cerchio D è π, l'area di $T(D)$ è 2π.

Esercizio 2. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2}{x^2-1}\right) \tag{1}$$

definita su $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(a) Calcolare la derivata di $f(x)$ *e i punti di massimo o minimo locale.*

Derivata $f'(x)$*:*

Punti di estremo locale:

(b) Tracciare il grafico qualitativo di f.

(c) La funzione $f(x)$ *definita da* (1) *è integrabile in senso generalizzato in un intorno di* $+\infty$*?*

Risposta:

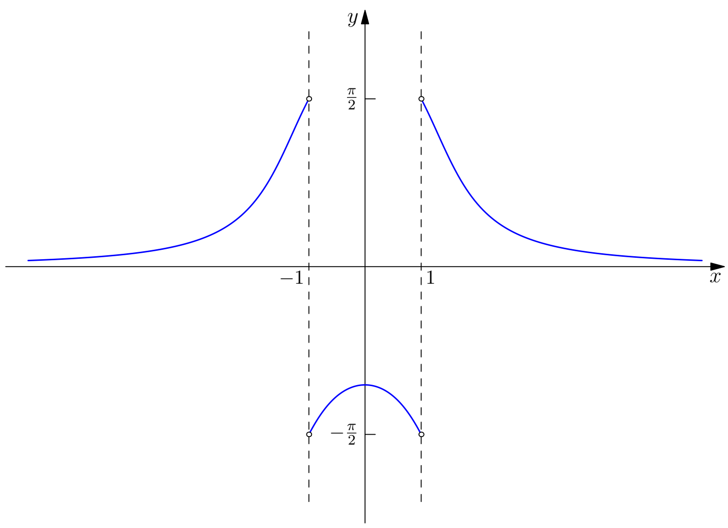
Soluzioni

(a) Per ogni x nel dominio di f, si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{4}{(x^2-1)^2}}\left(-\frac{4x}{(x^2-1)^2}\right) = -\frac{4x}{x^4 - 2x^2 + 5}$$

L'unico punto di estremo relativo è $x = 0$, che è un punto di massimo relativo.

(b)



(c) Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{2}{x^2-1} \sim \frac{2}{x^2-1}$. Allora, per il criterio del confronto asintotico, $f(x)$ è integrabile in un intorno di $+\infty$.

Esercizio 3. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = x^2 y^3 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Si trovi la soluzione, specificando qual è il massimo intervallo sul quale la soluzione è definita.

Soluzione: $\boxed{}$ *Intervallo massimo:* $\boxed{}$

Soluzioni

Separando le variabili, otteniamo

$$\frac{dy}{y^3} = x^2\,dx$$

Allora $\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2\,dx$, e quindi

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{3}x^3 + C \tag{2}$$

La condizione $y(1) = 3$ dà $-1/18 = 1/3 + C$, da cui $C = -7/18$. Sostituendo questo valore di C nell'equazione (2), otteniamo la soluzione

$$y(x) = \frac{3}{\sqrt{7 - 6x^3}} \tag{3}$$

Si noti che la condizione $y(1) = 3$ impone la scelta del segno $+$ davanti alla radice. L'intervallo massimale sul quale è definita la soluzione del problema di Cauchy è il più grande intervallo sul quale il radicando $7 - 6x^3$ è positivo, cioè $\left(-\infty, \sqrt[3]{7/6}\right)$.

Esercizio 4. *Si consideri la curva α nello spazio di equazioni parametriche:*

$$\alpha: \begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 2e^t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

(a) Scrivere l'integrale che dà la lunghezza della curva α e calcolarlo.

Integrale da calcolare: $\boxed{}$ *Lunghezza della curva:* $\boxed{}$

(b) Calcolare $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ nel punto corrispondente al valore del parametro $t = 0$.

$\mathbf{T}(0) =$ $\qquad$ $\mathbf{N}(0) =$ $\qquad$ $\mathbf{B}(0) =$

Soluzioni

(a) L'integrale che dà la lunghezza della curva è

$$\int_0^1 |\alpha'(t)|\, dt = \int_0^1 \sqrt{4e^{4t} + 4e^{2t} + 1}\, dt = \int_0^1 \sqrt{(2e^{2t}+1)^2}\, dt = \int_0^1 (2e^{2t}+1)\, dt = [e^{2t} + t]_0^1 = e^2$$

(b) $\alpha'(t) = (2e^{2t}, 2e^t, 1)$ e $\alpha''(t) = (4e^{2t}, 2e^t, 0)$. Pertanto

$$\alpha'(0) = (2,2,1), \qquad \alpha''(0) = (4,2,0)$$

Dunque

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} = \frac{(2,2,1)}{3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Si ha:

$$\alpha'(0) \times \alpha''(0) = (-2, 4, -4)$$

Allora

$$\mathbf{B}(0) = \frac{\alpha'(0) \times \alpha''(0)}{|\alpha'(0) \times \alpha''(0)|} = \frac{(-2,4,-4)}{6} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Infine

$$\mathbf{N}(0) = \mathbf{B}(0) \times \mathbf{T}(0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$