T.(a)	T.(b)	Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Quarto Appello** **Settembre 2018**	**Docente:**	**Numero di iscrizione:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Prima parte: Teoria (punti 4+4).

T.(a) Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del limite di successioni in $\mathbb{R}$.

T.(b) Dimostrare il seguente teorema:

Se la lunghezza di un vettore $\mathbf{v}(t)$ *in* $\mathbb{R}^3$ *(oppure in* $\mathbb{R}^2$*) è costante al variare di* t *in un intervallo* I *di* $\mathbb{R}$*, allora il vettore derivato* $\mathbf{v}'(t)$ *è ortogonale a* $\mathbf{v}(t)$*.*

Seconda parte: Esercizi.

Punteggi degli esercizi: **Es.1: 2+2** **Es.2: 2+2+2+2+2** **Es.3: 2+2** **Es.4: 2+2**

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

Esercizio 1 *(a) Scrivere in forma esponenziale e riportare sul piano di Gauss le soluzioni in* $\mathbb{C}$ *dell'equazione:*

$$z^4 = e^{i(-\frac{2}{3}\pi)}$$

(b) Trovare i punti fissi della trasformazione $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ *che manda* $z \in \mathbb{C}$ *in*

$$f(z) = \frac{1}{i}z + i$$

(I punti fissi di f *sono le soluzioni di* $f(z) = z$*.) Di quale trasformazione geometrica si tratta? Motivare la risposta.*

Risposte

(a) Soluzioni e loro rappresentazione sul piano di Gauss*:*

(b)
Punti fissi*:*

Di quale trasformazione geometrica si tratta? Spiegare.

Risposte

(a) L'equazione $z^4 = e^{i(-\frac{2}{3}\pi)}$ ha le quattro soluzioni complesse

$$e^{i\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2h\pi}{4}\right)}, \qquad h = 0, 1, 2, 3.$$

Facendo i conti, tali soluzioni si scrivono nel modo seguente:

$$e^{i(-\frac{\pi}{6})}, \qquad e^{i(\frac{\pi}{3})}, \qquad e^{i(\frac{5\pi}{6})}, \qquad e^{i(-\frac{2\pi}{3})} \left(= e^{i(\frac{4\pi}{3})}\right)$$

Questi quattro punti sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza unitaria.
(b) L'equazione (algebrica di primo grado) $\frac{1}{i}z + i = z$ ha una e una sola soluzione:

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Siccome il coefficiente $1/i$ è unitario (ha modulo 1), la trasformazione $z \longmapsto f(z) = \frac{1}{i}z + i$ è la composizione di una rotazione di centro l'origine ($z \longmapsto \frac{1}{i}z$) e di una traslazione. Quindi è una isometria, perché composizione di isometrie. E siccome f è una isometria con un unico punto fisso, è una rotazione, il cui centro è il punto fisso $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Esercizio 2 *Si studi la funzione*

$$f(x) = \ln x - \arctan(x-1), \qquad x \in (0, +\infty)$$

seguendo lo schema della tabella sottostante. (Riportare concisamente calcoli e spiegazioni sotto la tabella e sul retro del foglio).

Asintoti:

La retta $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^+$.

Espressione semplificata della derivata prima:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x[1+(x-1)^2]}$$

Punti di massimo locale e punti di minimo locale:

$x = 1$ è punto di massimo locale per f; $\quad x = 2$ è punto di minimo locale per f

Polinomio di Taylor di ordine 2 di f nel punto $x = 1$:

Per $x \to 1$, $\ln x - \arctan(x-1) = \ln(1+(x-1)) - \arctan(x-1) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) - (x-1) + o((x-1)^2)$

Quindi, il Polinomio di Taylor di ordine 2 di f nel punto $x = 1$ è

$$-\frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Grafico qualitativo:

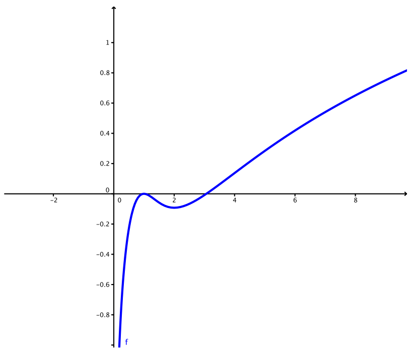

Figura 1: Grafico di $f(x) = \ln x - \arctan(x-1)$

Esercizio 3 *(a) Facendo uso dei criteri di convergenza, stabilire se l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-(x^4)} dx \tag{1}$$

è convergente.

(b) Calcolare il valore numerico dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} x e^{-(x^2)}\, dx$$

Risposte

(a) L'integrale (1) converge? Spiegare.

(b) Valore numerico dell'integrale generalizzato. Spiegare.

Risposte

(a) Per $x \to +\infty$, la funzione $e^{(x^4)}$ tende a $+\infty$ più velocemente di qualunque potenza di x. In particolare, $\frac{x^4}{e^{(x^4)}} \to 0$ se $x \to +\infty$.Quindi vale definitivamente la disuguaglianza

$$\frac{x^4}{e^{(x^4)}} < 1$$

a sua volta equivalente a

$$\frac{x^2}{e^{(x^4)}} < \frac{1}{x^2}$$

Quindi, per il criterio del confronto, $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-(x^4)}\, dx$ converge.

(b) Utilizzando la regola di integrale per sostituzione, si vede facilmente che

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c,$$

da cui abbiamo

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\left[\lim_{M\to+\infty} e^{-x^2}\right]_0^M = \frac{1}{2}\left(1 - \lim_{M\to+\infty} e^{-M^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4 *Si consideri la curva* $(0,+\infty) \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbb{R}^3$ *definita da*

$$\mathbf{C}(t) = \left(\frac{1-t^2}{t}, -t, \frac{1+t}{t}\right), \qquad t \in (0,+\infty)$$

(a) Dimostrare che la curva $\mathbf{C}$ *è piana e trovare l'equazione del piano che la contiene.*
(b) Scrivere l'equazione del piano normale alla curva $\mathbf{C}$ *nel punto* $\mathbf{C}(1)$.

Risposte

(a) Equazione del piano su cui giace la curva:

(b) Equazione del piano normale alla curva (ossia, ortogonale alla retta tangente) nel punto $P = \mathbf{C}(1)$:

(c) Curvatura nel punto $P = \mathbf{C}(1)$:

Risposte

(a) La curva è piana se, e solo se, esiste un piano $ax + by + cz + d = 0$ per il quale si ha, per ogni $t \in (0,+\infty)$,

$$a\frac{1-t^2}{t} + b(-t) + c\frac{1+t}{t} + d = 0$$

ossia

$$(-a-b)t^2 + (c+d)t + a + c = 0$$

Quest'ultima uguaglianza vale per ogni $t \in (0,+\infty)$ se, e solo se,

$$-a-b=0, \quad c+d=0, \quad a+c=0$$

Ad esempio, possiamo prendere $a = 1, b = -1, c = -1, d = 1$. Pertanto la curva è piana, e il piano che la contiene è

$$x - y - z + 1 = 0$$

(b) Si ha $\mathbf{C}(1) = (0,-1,2)$. Il vettore tangente non normalizzato (velocità vettoriale istantanea) è

$$\mathbf{C}'(t) = \left(-\frac{1}{t^2} - 1, -1, -\frac{1}{t^2}\right)$$

Quindi, in corrispondenza al valore $t = 1$, abbiamo

$$\mathbf{C}'(1) = (-2,-1,-1)$$

Il piano normale a $\mathbf{C}$ nel punto $\mathbf{C}(1)$ è dunque il piano passante per $\mathbf{C}(1) = (0,-1,2)$ e ortogonale a $\mathbf{C}'(1) = (-2,-1,-1)$:

$$-2(x-0) - 1(y+1) - 1(z-2) = 0, \quad \text{ossia} \quad 2x + y + z - 1 = 0$$

(c) Si ha $\mathbf{C}''(t) = (2t^{-3}, 0, 2t^{-3})$ e quindi $\mathbf{C}''(1) = (2,0,2)$. La curvatura nel punto $\mathbf{C}(1)$ è data da

$$\frac{|\mathbf{C}'(1) \times \mathbf{C}''(1)|}{|\mathbf{C}'(1)|^3} = \frac{|(-2,-1,-1) \times (2,0,2)|}{|(-2,-1,-1)|^3} = \frac{|(-2,2,2)|}{|(-2,-1,-1)|^3} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{6}\right)^3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$