T.(a)	T.(b)	Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Secondo Appello** **25 Giugno 2018 Compito A**	**Docente:**	**# iscrizione:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Prima parte: Teoria (punti 4+4).

T.(a) Enunciare e dimostrare il teorema di Taylor con il resto secondo Peano.

T.(b) Enunciare e dimostrare il teorema sul limite di successioni reali monotòne.

Seconda parte: Esercizi.

Punteggi degli esercizi: **Es.1: 3+1** **Es.2: 3+3** **Es.3: 1+2+2** **Es.4: 2+4+3**

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro.* **I fogli di brutta non devono essere consegnati**.

Es. 1 Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, si considerino i piani $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, rispettivamente di equazioni cartesiane

$$\mathcal{P}: \quad x - y - z - 1 = 0, \qquad\qquad \mathcal{P}': \quad 3x - y + z - 1 = 0$$

e il punto $A = (0, 3, 4)$.

(a) Trovare un vettore di direzione della retta $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

(b) Scrivere equazioni parametriche di una retta, se esiste, che passi per il punto A e sia parallela a $\mathcal{P}$ e a $\mathcal{P}'$.

Soluzione

(a) I due piani non sono paralleli. Un vettore di direzione di $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ è un qualunque multiplo (non nullo) del prodotto vettoriale $\mathbf{w} \times \mathbf{w}'$, dove $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}'$ sono vettori di giacitura di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ rispettivamente. Ad esempio, un vettore di direzione di $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ è $(1, 2, -1)$.

(b) Esiste un'unica retta, chiamiamola r, che passa per il punto A e che è parallela sia a $\mathcal{P}$, sia a $\mathcal{P}'$. Precisamente, è la retta passante per A e parallela alla retta $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. Equazioni parametriche per tale retta r sono:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Es. 2 (a) Trovare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di

$$f(x) = \arctan \sqrt{|x^2 - 1|}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

specificando se si tratti rispettivamente di un minimo assoluto e di un massimo assoluto.

(b) Dimostrare l'identità:

$$\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{per ogni } t > 0$$

Quindi, stabilire se la funzione

$$\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{|x^2 - 1|}$$

è integrabile (in senso generalizzato) in un intorno di $+\infty$.

Soluzione

(a) La funzione $f(x) = \arctan \sqrt{|x^2 - 1|}$ è continua su $\mathbb{R}$, non negativa e pari. Studiamola per $x \geq 0$. La funzione $|x^2 - 1|$ è decrescente su $[0, 1]$ e crescente su $[1, +\infty)$. Siccome le funzioni radice quadrata ($t \longmapsto \sqrt{t}$) e arctan sono entrambi crescenti su $[0, +\infty)$, anche la funzione composta $f(x) = \arctan \sqrt{|x^2 - 1|}$ è decrescente su $[0, 1]$ e crescente su $[1, +\infty)$. Allora:

(i) $\texttt{inf}\, f = 0 = f(1) (= f(-1))$, e quindi 0 è il minimo assoluto di f;

(ii) $\texttt{sup}\, f = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi/2$ (che non è massimo assoluto, perché il valore $\pi/2$ non appartiene all'immagine di arctan).

Inoltre, in $x = 0$ la funzione ha un punto di massimo locale, non assoluto.

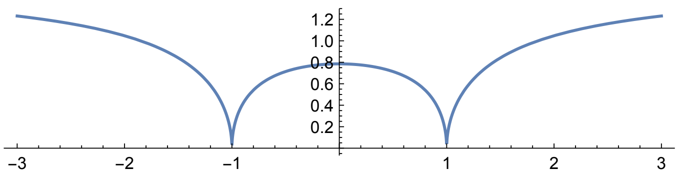
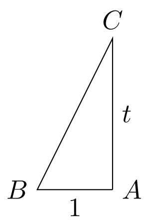


Figura 1: Grafico di $y = \arctan \sqrt{|x^2 - 1|}$

(b) L'identità

$$\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}, \qquad t > 0$$

risulta ovvia se si osserva che essa esprime il fatto che la somma degli angoli acuti di un triangolo rettangolo è un angolo retto:



$$\frac{\pi}{2} = \widehat{B} + \widehat{C} = \arctan \frac{t}{1} + \arctan \frac{1}{t}$$

Possiamo dimostrarla anche nel modo seguente. La derivata di $g(t) = \arctan t + \arctan \frac{1}{t}$ è nulla sull'intervallo $(0, +\infty)$:

$$g'(t) = \frac{1}{1 + t^2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{t^2}} \cdot (-1) \frac{1}{t^2} = 0$$

Dunque g è costante su $(0, +\infty)$. Per determinare il valore K di tale costante, basta valutare g in un punto qualsiasi del suo dominio. Ad esempio, $K = g(1) = \pi/2$.

Abbiamo allora, per $x \to +\infty$:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{|x^2 - 1|} = \arctan \frac{1}{\sqrt{|x^2 - 1|}} \sim \arctan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la funzione $\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{|x^2 - 1|}$ non è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $+\infty$.

Es. 3 Consideriamo la trasformazione T, il cui dominio e il cui codominio sono il piano complesso bucato $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, definita nel modo seguente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{0\} & \xrightarrow{T} & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z & \longmapsto & T(z) = \dfrac{4}{\overline{z}} \end{array}$$

(dove $\overline{z}$ denota il coniugato di z).

(a) Sia $z = x + iy$ la scrittura in forma algebrica di $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Scrivere il numero complesso $T(z)$ in forma algebrica.

(b) Calcolare $(T \circ T)(z)(= T(T(z))$, dove $T \circ T$ denota la funzione composta. T è invertibile?

(c) Disegnare sul piano di Gauss l'insieme $\mathrm{Fix}(T)$ dei punti fissi di T:

$$\mathrm{Fix}(T) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid T(z) = z\}$$

Soluzione

(a) $\left[\text{Per } T(z) = \dfrac{R^2}{\overline{z}}, \text{ con } R > 0 \text{ qualunque}\right]$. La forma algebrica di $T(z)$ è

$$T(z) = \frac{R^2}{\overline{z}} = \frac{R^2 z}{z\overline{z}} = \frac{R^2(x+iy)}{x^2+y^2} = \frac{R^2 x}{x^2+y^2} + i\frac{R^2 y}{x^2+y^2}$$

(b) Risulta

$$(T \circ T)(z) = T(T(z)) = \frac{R^2}{\overline{T(z)}} = \frac{R^2}{\overline{\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)}} = z$$

Dunque $T \circ T = \mathtt{Id}$ è l'identità (di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). Pertanto T è invertibile (e $T^{-1} = T$).

(c) $\dfrac{R^2}{\overline{z}} = z$ equivale a $z\overline{z} = R^2$, ossia a $|z|^2 = R^2$ (perché $z\overline{z} = |z|^2$). Dunque l'insieme dei punti fissi di T è la circonferenza di centro 0 e raggio R.

Es. 4 L'equazione differenziale

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V, \tag{1}$$

è un modello di un circuito elettrico in cui $i = i(t)$ è l'intensità di corrente, V la tensione, R la resistenza e L l'induttanza.

Primo caso: R, L e V costanti positive.

(a) Determinare la soluzione $i(t)$ dell'equazione (1) (R, L, V costanti positive) che soddisfa la condizione iniziale $i(0) = 0$. Il grafico di tale soluzione ha un asintoto orizzontale per $t \to +\infty$? (Per grandi valori di t, la corrente è costante?)

Secondo caso: $R = L = 1$ e $V = \sin\omega t$.

Consideriamo dunque l'equazione:

$$\frac{di}{dt} + i = \sin\omega t \tag{2}$$

(b) Trovare tutte le primitive (le anti-derivate) della funzione

$$\varphi(t) = e^t \sin\omega t, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (\omega \text{ costante reale})$$

(c) Trovare la soluzione generale dell'equazione (2) e la soluzione particolare $i(t)$ di (2) soddisfacente $i(0) = 0$. Il grafico di quest'ultima soluzione particolare ha un asintoto orizzontale per $t \to +\infty$?

Soluzione

(a) L'equazione non omogenea (1) ha una (e una sola) soluzione costante V/R. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata $L\dfrac{di}{dt} + Ri = 0$ è $ce^{-\frac{R}{L}t}$, $c \in \mathbb{R}$. Quindi la soluzione generale dell'equazione (1) è

$$ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

La condizione iniziale $i(0) = 0$ impone $c = -V/R$. Pertanto, la soluzione soddisfacente $i(0) = 0$ è

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Poiché

$$\lim_{t\to+\infty} i(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = V/R,$$

(perché $R/L > 0$ e quindi l'esponenziale è decrescente), il grafico di $i(t)$ ha l'asintoto $i = V/R$ per $t \to +\infty$. La corrente di lungo periodo è quindi costante e uguale a V/R.

(b) Applichiamo due volte il metodo di integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
\int e^t \sin\omega t &= e^t \sin\omega t - \int e^t \omega \cos\omega t\, dt \\
&= e^t \sin\omega t - \omega\left[e^t \cos\omega t + \omega \int e^t \sin\omega t\, dt\right] \\
&= e^t \sin\omega t - \omega e^t \cos\omega t - \omega^2 \int e^t \sin\omega t\, dt
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int e^t \sin\omega t\, dt = \frac{e^t}{1+\omega^2}(\sin\omega t - \omega\cos\omega t) + k \tag{3}$$

Altro modo: da $e^{t+i\omega t} = e^t(\cos\omega t + i\sin\omega t)$, segue che $e^t \sin\omega t = \mathtt{Im}(e^{t+i\omega t})$. Una primitiva di $e^{(1+i\omega)t}$ è

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i\omega}e^{t+i\omega t} &= \frac{1-i\omega}{1+\omega^2}e^{t+i\omega t}\\ &= \frac{e^t}{1+\omega^2}(1-i\omega)(\cos\omega t + i\sin\omega t)\\ &= \frac{e^t}{1+\omega^2}(\cos\omega t + \omega\sin\omega t) + i\frac{e^t}{1+\omega^2}(\sin\omega t - \omega\cos\omega t)\end{aligned}$$

Quindi una primitiva di $e^t\sin\omega t$ è $\dfrac{e^t}{1+\omega^2}\,(\sin\omega t - \omega\cos\omega t)$.

(E una primitiva di $e^t\cos\omega t$ è $\dfrac{e^t}{1+\omega^2}\,(\cos\omega t + \omega\sin\omega t)$.)

(c) La soluzione generale dell'equazione (2) è

$$\begin{aligned}e^{-t}\left(c + \int e^t\sin\omega t\,dt\right) &= ce^{-t} + e^{-t}\left[\frac{e^t}{1+\omega^2}\,(\sin\omega t - \omega\cos\omega t)\right]\\ &= ce^{-t} + \frac{1}{1+\omega^2}\,(\sin\omega t - \omega\cos\omega t) \qquad\qquad c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

La condizione iniziale $i(0) = 0$ richiede $c - \dfrac{\omega}{1+\omega^2} = 0$. Quindi la soluzione che soddisfa $i(0) = 0$ è

$$i(t) = \frac{\omega}{1+\omega^2}e^{-t} + \frac{1}{1+\omega^2}\,(\sin\omega t - \omega\cos\omega t)$$

Per $t \to +\infty$, il limite della funzione $i(t)$ (definita sopra) non esiste, e quindi non c'è un asintoto orizzontale. Dato che il termine $\dfrac{\omega}{1+\omega^2}e^{-t}$ decresce rapidamente per $t \to +\infty$, per grandi valori di t la corrente ha pressoché un andamento sinusoidale, con la stessa frequenza della tensione.