Es. 1	Es. 2	Es. 3	Teoria:	Totale

Numero di iscrizione alla prova scritta:	**Docente:**	**Analisi e Geometria 1** **Prima Prova** **22 Novembre 2016** **Compito F**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi: Es.1: 7; Es.2: 7; Es.3: 10 Teoria: 8,

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate****. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli: nello spazio sotto il testo e sul retro del foglio. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

Esercizio 1.

a) Si consideri la seguente equazione nella variabile complessa z:

$$(*) \qquad \overline{z}^2 = 2z.$$

Scrivere le soluzioni di $(*)$ in forma algebrica e rappresentarle sul piano complesso.

Soluzioni in forma algebrica: *Rappresentazione sul piano*:

b) Poniamo

$$S = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid w^2 = -1 + i\sqrt{3} \right\}$$

Trovare i numeri complessi che appartengono all'insieme S, scrivendoli sia in forma algebrica, sia in forma esponenziale.

Forma algebrica: *Forma esponenziale*:

Calcoli e motivazioni delle risposte (Si può scrivere anche sul retro di questo foglio):

Soluzioni

a. Notiamo subito che $z = 0$ soluzione di $(*)$. Cerchiamo quindi soluzioni non nulle nella forma polare

$$z = \rho\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \text{ ove } \rho \in (0, +\infty) \text{ e } \vartheta \in [0, 2\pi) \text{ sono incogniti.}$$

Utilizzando la formula di de Moivre, abbiamo

$$\overline{z}^2 = \rho^2\,[\cos(-2\vartheta) + i\sin(-2\vartheta)]\,,$$

da cui, tornando all'equazione $(*)$

$$\rho^2\,[\cos(-2\vartheta) + i\sin(-2\vartheta)] = 2\rho\,[\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)]\,.$$

Possiamo quindi scorporare tale equazione in una equazione per i moduli ed una per gli argomenti

$$\begin{cases} \rho^2 = 2\rho, \\ -2\vartheta = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \rho = 2, \\ \vartheta_k = \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Pertanto, le soluzioni non nulle dell'equazione $(*)$ sono

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\,[\cos 0 + i\sin 0] = 2, \\ z_1 &= 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -1 + i\sqrt{3}, \\ z_2 &= 2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = -1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

b. Gli elementi dell'insieme S sono le due radici s_1, s_2 di $-1 + i\sqrt{3}$:

$$s_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$s_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Esercizio 2.

a) Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\left[1-\sqrt[5]{1+x^3}\right]\,\ln\left(1+x^3\right)}{3\,\mathrm{artg}\left[\sin(x^4)\right]} \tag{1}$$

Valore del limite L:

b) Estendiamo il dominio della funzione f, definendo $f(0) = L$, dove L è il limite (1) trovato nel punto **a)**. Dimostrare che f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$.

c) Disegnare un grafico qualitativo di f vicino a $x_0 = 0$.

Grafico qualitativo di f vicino a $x_0 = 0$:

Calcoli e motivazioni delle risposte (Si può scrivere anche sul retro di questo foglio):

Soluzioni

Si può calcolare il limite con il metodo degli asintotici:

$$\begin{aligned}L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x^3\right)\left[1-\sqrt[5]{1+x^3}\right]}{3 \text{ artg } \sin(x^4)} &= \\ = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(-\frac{1}{5}x^3\right)}{3x^4} &= \\ = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{5}x^6}{3x^4} &= \\ = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{15}x^2 &= 0\end{aligned}$$

Dunque, se estendiamo f definendo $f(0) = L = 0$, f è continua in 0. Dal calcolo del limite, vediamo che vale l'equivalenza asintotica:

$$f(x) \sim -\frac{1}{15}x^2 \qquad\qquad x \to 0$$

cioè $f(x) = -\frac{1}{15}x^2 + o(x^2)$. Dunque

$$f(x) = f(0) + f'(0)x \underbrace{-\frac{1}{15}x^2 + o(x^2)}_{o(x)} = 0 + 0 \cdot x + o(x), \qquad\qquad x \to 0$$

Ne segue che f è differenziabile (derivabile) in 0 e $f'(0) = 0$.

Per dimostrare che f è derivabile in 0 e che $f'(0) = 0$, si può anche notare che il rapporto incrementale di f in 0 è dato da

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\left[1-\sqrt[5]{1+x^3}\right]\ln\left(1+x^3\right)}{3x \operatorname{artg}\left[\sin(x^4)\right]}$$

Dal calcolo precedente del limite L, risulta che, per $x \to 0$,

$$\frac{f(x)}{x} \sim -\frac{1}{15}x$$

e quindi

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Il grafico qualitativo di f vicino a $x_0 = 0$ è quello della parabola $y = -\frac{1}{15}x^2$, la cui retta tangente nel punto di ascissa 0 è la retta $y = 0$.

Esercizio 3.

Sia f la funzione
$$f(x) = x \exp\left(-\frac{x+7}{x-1}\right)$$
definita su $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

a. Determinare il limiti di f per $x \to \pm\infty$ e per $x \to 1^{\pm}$.

Limiti:

b. Determinare gli eventuali asintoti (orizzontali o obliqui).

Equazioni degli asintoti:

c. Calcolare la derivata prima f'.

Derivata: $f'(x) =$:

d. Trovare i massimi e i minimi locali di f.

Massimi e i minimi locali:

e. Disegnare il grafico di f.

Grafico di f :

Calcoli e motivazioni delle risposte (Si può scrivere anche sul retro di questo foglio):

Soluzioni

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ asintoto verticale sinistro,
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0^+$.

Cerchiamo gli asintoti obliqui:

$$m := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = e^{-1}\,,$$

$$q := \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - e^{-1}x = \lim_{x\to\pm\infty} xe^{-\frac{x+7}{x-1}} - e^{-1}x = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1}x\Big(e^{-\frac{x+7}{x-1}+1} - 1\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1}x\Big(e^{-\frac{8}{x-1}} - 1\Big)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1}x\Big(-\frac{8}{x-1}\Big) = -\frac{8}{e}$$

Dunque, la retta $y = \frac{x-8}{e}$ è asintoto obliquo sia per $x \to -\infty$, sia per $x \to +\infty$.
La funzione f è derivabile sul dominio $D := \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (perché composta di funzioni derivabili) e si ha:

$$f'(x) = e^{-\frac{x+7}{x-1}} + xe^{-\frac{x+7}{x-1}}\Big(-\frac{(x-1)-(x+7)}{(x-1)^2}\Big) = e^{-\frac{x+7}{x-1}}\Big(1 + \frac{8}{(x-1)^2}\Big) = \frac{x^2+6x+1}{(x-1)^2}e^{-\frac{x+7}{x-1}}$$

$f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 + 6x + 1 = 0$, le cui soluzioni sono $x_\pm := -3 \pm 2\sqrt{2}$.
La funzione è crescente in $(-\infty, x_-) \cup (x_+, 1) \cup (1, +\infty)$ e decrescente in (x_-, x_+).
Dunque x_- è un punto di massimo locale, e x_+ è un punto di minimo locale.