Analisi e Geometria 1 **Terzo appello** **4 settembre 2017 Compito F**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Prima parte

Scrivere le risposte ai due seguenti quesiti A e B su questa facciata e sul retro di questo foglio.

A. Enunciare e dimostrare il *Teorema del Valore Medio* (di Lagrange). (3 punti)

B. Scrivere e dimostrare la formula che esprime il prodotto di due numeri complessi scritti in coordinate polari. (3 punti)

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Primo appello** **4 Settembre 2017 Compito F**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Seconda parte

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 ; Es.2: 7 ; Es.3: 5 ; Es.4: 6.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

(a) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin(x^\alpha)}{x^6 + x^{6\alpha^2}}.$$

nei tre casi seguenti: $\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$.

Soluzione

Osserviamo che, per $x \to 0^+$ e $\alpha > 0$, abbiamo

$$\frac{x^\alpha - \sin(x^\alpha)}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = \frac{x^\alpha - (x^\alpha - \frac{1}{3!}x^{3\alpha} + o(x^{3\alpha})}{x^6 + x^{6\alpha^2}} \sim \frac{\frac{1}{6}x^{3\alpha}}{x^6 + x^{6\alpha^2}}.$$

Primo caso: $\alpha = \frac{1}{4}$.

Per $x \to 0^+$,

$$\frac{\frac{1}{6}x^{3\alpha}}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = \frac{\frac{1}{6}x^{3/4}}{x^6 + x^{3/8}} \sim \frac{\frac{1}{6}x^{3/4}}{x^{3/8}} = \frac{1}{6}x^{3/8} \to 0$$

Secondo caso: $\alpha = 1$.

Per $x \to 0^+$,

$$\frac{\frac{1}{6}x^{3\alpha}}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^6 + x^6} \sim \frac{1}{12x^3} \to +\infty$$

Terzo caso: $\alpha = 2$.

Per $x \to 0^+$,

$$\frac{\frac{1}{6}x^{3\alpha}}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = \frac{\frac{1}{6}x^6}{x^6 + x^{24}} \sim \frac{\frac{1}{6}x^6}{x^6} \to \frac{1}{6}$$

(b) Si consideri la funzione $(-1, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = x - 10\,\ln(1 + x)\,.$$

i. Determinare gli eventuali asintoti di f.
ii. Determinare i punti di massimo locale e di minimo locale di f.
iii. Calcolare il polinomio di Taylor di f con centro in $x_0 = 0$ e ordine 3.
iv. Disegnare il grafico qualitativo di f.

Soluzione

La funzione f ha l'asintoto verticale $x = -1$ per $x \to (-1)^+$. Infatti:

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty$$

Per $x \to +\infty$, la funzione f non presenta né asintoti orizzontali, né asintoti obliqui.
La derivata di $f(x) = x - 10\,\ln(1 + x)$ è

$$f'(x) = \frac{x - 9}{1 + x}$$

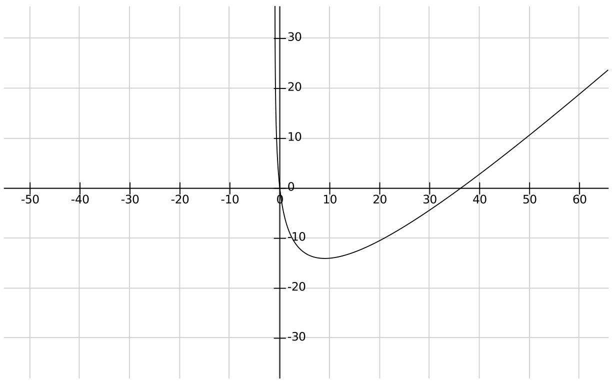
Quindi si deduce che la funzione f ha un minimo locale (e globale) in $x = 9$, e non ha altri minimi o massimi locali.
Lo sviluppo di MacLaurin di f di ordine 3 è

$$f(x) = x - 10\ln(1 + x) = x - 10\left(x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)\right) = -9x + 5x^2 - \frac{10}{3}x^3 + o(x^3)$$

Quindi il polinomio di Taylor di f con centro in $x_0 = 0$ e ordine 3 è

$$-9x + 5x^2 - \frac{10}{3}x^3$$

Il grafico qualitativo di f è



(c) (i) Disegnare sul piano di Gauss i tre insiemi A, B e C definiti nel modo seguente:

$$A = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \quad |z + 1 - i| = |z| \Big\},$$
$$B = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \quad \mathrm{Re(z)} + \mathrm{Im(z)} = 0 \Big\}$$
$$C = A \cap B$$

(ii) Risolvere il sistema:

$$(*) \begin{cases} |z + 1 - i| = |z| \\ \mathrm{Re(z)} + \mathrm{Im(z)} = 0\,. \end{cases}$$

(iii) Poniamo $z_0 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i$. Scrivere in coordinate polari i numeri $\dfrac{1}{z_0}$ e $(1 + i) z_0$

Soluzione:
L'insieme A è il luogo dei punti equidistanti da $z = -1 + i$ (il punto $(-1, 1)$) e da $z = 0$ (il punto $(0, 0)$). Quindi A è l'asse del segmento di estremi $(-1, 1)$ e $(0, 0)$, ossia è la retta $y = x + 1$.
L'insieme B è la retta $x + y = 0$ del piano di Gauss.
L'insieme $C = A \cap B$ (l'intersezione di A e B) è il punto $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$. Si vede infatti facilmente che il sistema

$$(*) \begin{cases} |z + 1 - i| = |z| \\ \mathrm{Re(z)} + \mathrm{Im(z)} = 0\,. \end{cases}$$

si scrive

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$.

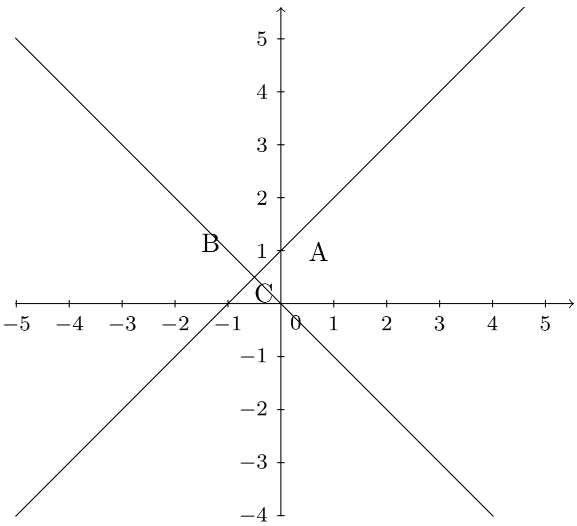


Figure 1: L'insieme A è l'asse del segmento di estremi $(0, 0)$ e $(-1, 1)$, cioè la retta $y = x + 1$; l'insieme B è la retta $x + y = 0$; l'insieme $C = A \cap B$ è il punto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Il numero $z_0 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i$ si scrive, in forma polare, come

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right)$$

Allora,

$$\frac{1}{z_0} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right)$$

e

$$(1+i)z_0 = \cos\pi + i\sin\pi \quad (= -1)$$

(d) Si consideri la curva

$$f : \begin{cases} x = t + \cos t \\ y = t + \sin t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi] .$$

i. Determinare i versori della terna intrinseca di f nel punto $P = (1, 0, 1)$.
ii. Determinare la curvatura di f nel punto P.

Soluzione

Si ha

$$\begin{cases} x' = 1 - \sin t \\ y' = 1 + \cos t \\ z' = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = -\cos t \\ y'' = -\sin t \\ z'' = 0 . \end{cases}$$

Si noti che la curva è regolare, cioè il vettore tangente f' non è mai nullo.

Si vede subito che il punto $P \equiv (1, 0, 1)$ appartiene a f e che corrisponde al punto che si ottiene per $t = 0$. Inoltre, si ha $f'(0) = (1, 2, 1)$ e $f''(0) = (-1, 0, 0)$. Quindi

$$f'(0) \wedge f''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, 2)$$

e $\|f'(0) \wedge f''(0)\| = \sqrt{5}$. Si hanno così i versori

$$\mathbf{t}(0) = \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b}(0) = \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(0,-1,2)}{\sqrt{5}} .$$

Infine, il versore normale è dato da

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(-5,2,1)}{\sqrt{30}} .$$

La curvatura e il raggio di curvatura di γ in P sono dati da

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{6}} \qquad \text{e} \qquad \rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{5}} .$$