Analisi e Geometria 1 Primo appello 14 Febbraio 2017 Compito A	Docente:	Numero di iscrizione all'appello:
Cognome:	Nome:	Matricola:

Prima parte

a. Scrivere la condizione di ortogonalità tra il piano $(X - X_0) \cdot \mathbf{w} = 0$ e il piano $(X - X_1) \cdot \mathbf{v} = 0$:

b. Dimostrare: *Sia* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione reale derivabile su un intervallo* I *di* $\mathbb{R}$. *Se* $f'(x) > 0$ *in ogni punto* $x \in I$, *allora* f *è strettamente crescente su* I.

c. Completare la *definizione*: *Si dice che la successione di numeri reali* (a_n), $n \in \mathbb{N}$, *diverge a* $+\infty$ *se:*

d. *Usando la definizione di integrale generalizzato, dire per quali valori di* $a \in \mathbb{R}$ *l'integrale* $\int_1^{+\infty} 1/x^a \, dx$ *è convergente, giustificando la risposta.*

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Primo appello** **14 Febbraio 2017 Compito A**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Seconda parte

Punteggi degli esercizi: Es. 1: 5 ; Es.2: 7 ; Es.3: 6 ; Es.4: 6.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{\ln(1+3x) - 3\sin x}$$

Soluzione

Per $x \to 0$, valgono gli sviluppi:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2) \qquad \cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$$

$$\ln(1+3x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Dunque:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{\ln(1+3x) - 3\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + o(x^2) - 1 + 2x^2 + o(x^3)}{3x - \frac{9}{2}x^2 - 3x + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + o(x^2)}{-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = (4x+3)e^{\frac{1}{x}} \qquad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

(a) Trovare gli asintoti di $f(x)$;

(b) Determinare i punti di massimo locale e di minimo locale di f;

(c) Disegnare il grafico di f;

(d) Stabilire se l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

è convergente o divergente.

Soluzione

(a)

$$\lim_{x\to-\infty} (4x+3)e^{\frac{1}{x}} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} (4x+3)e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} (4x+3)e^{\frac{1}{x}} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} (4x+3)e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Dunque $f(x)$ non ha asintoti orizzontali e ha $\boxed{\text{l'asintoto verticale } x = 0}$. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+3}{x} e^{\frac{1}{x}} = 4$$

Per $x \to +\infty$ (e anche per $x \to -\infty$) si ha $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$. Allora

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 4x] &= \lim_{x\to+\infty} \left[(4x+3)e^{\frac{1}{x}} - 4x\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[(4x+3)\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 4x\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[4x + 4 + o(1) + 3 + \frac{3}{x} + +o\left(\frac{1}{x}\right) - 4x\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} [7 + o(1)] = 7
\end{aligned}$$

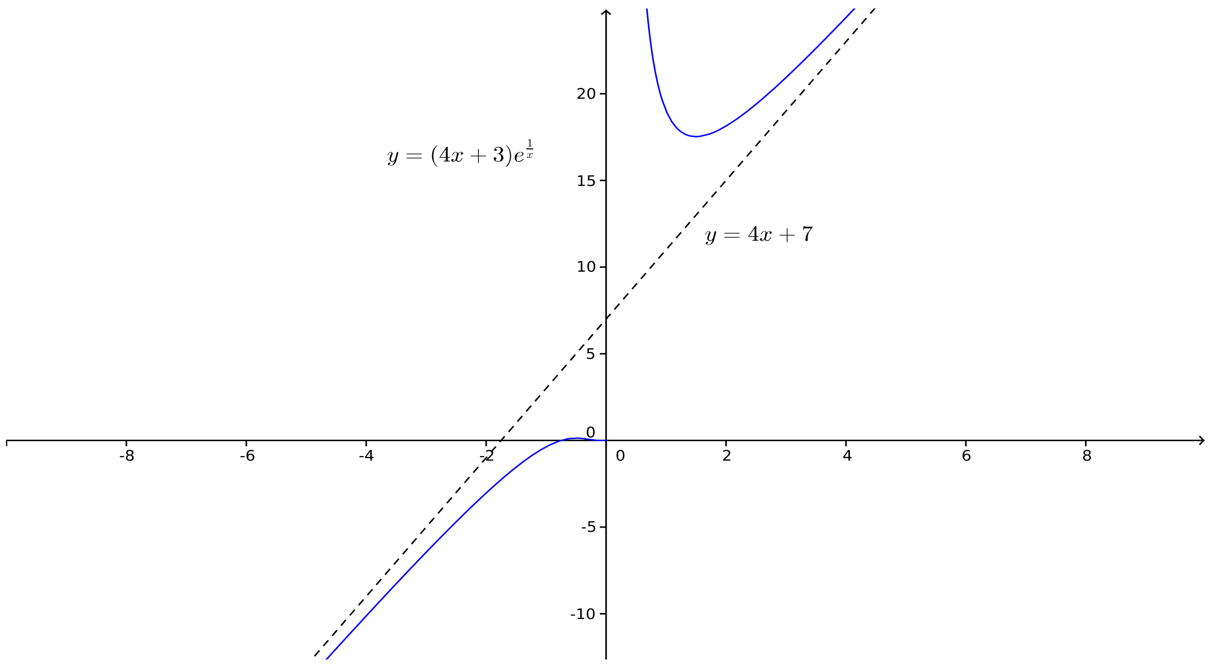
Nello stesso modo, si vede che $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - 4x] = 7$. Dunque, $\boxed{y = 4x + 7 \text{ è asintoto sia a } +\infty, \text{ sia a } -\infty}$.

(b) La derivata

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 4x - 3}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$$

si annulla in $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{3}{2}$. Dallo studio del segno di $f'(x)$ (che coincide con il segno di $4x^2 - 4x - 3$), si deduce che $\boxed{x_1 = -\frac{1}{2} \text{ è un punto di massimo locale}}$ e $\boxed{x_2 = \frac{3}{2} \text{ è un punto di minimo locale}}$.

(c)



(d) Poiché $e^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{x}$ per ogni $x \neq 0$, si ha, per $x \to 0^+$:

$$f(x) = (4x+3)e^{\frac{1}{x}} \sim 3e^{\frac{1}{x}} > 3\frac{1}{x}$$

Per i criteri del confronto e del confronto asintotico, l'integrale generalizzato $\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx \text{ è divergente}}$.

3. Si consideri l'equazione differenziale
$$y' + x^2 y = x^2 \tag{1}$$
   (a) Trovare la soluzione generale dell'equazione (1).
   (b) Sia $\overline{y}$ la soluzione particolare di (1) che soddisfa la condizione $\overline{y}(0) = 2$. Scrivere il polinomio di Maclaurin di $\overline{y}$ di ordine 3. (Non si richiede di trovare esplicitamente la soluzione $\overline{y}$.)
   (c) Trovare tutte le soluzioni non costanti dell'equazione (1) che hanno un punto di flesso in $x_0 = 0$.

Soluzione

(a) Posto
$$A(x) = \int_0^x t^2\, dt = \frac{1}{3}x^3 \tag{2}$$
(al posto di 0 si potrebbe prendere un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$) la soluzione generale dell'equazione lineare (1) è data da

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_0^x e^{A(t)} t^2\, dt \\ &= Ce^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \int_0^x e^{\frac{t^3}{3}} t^2\, dt \\ &= Ce^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \left[e^{\frac{t^3}{3}} \right]_0^x \\ &= Ce^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \left(e^{\frac{x^3}{3}} - 1 \right) \\ &= (C-1)e^{-\frac{x^3}{3}} + 1 \end{aligned}$$

dove C è un'arbitraria costante reale. Posto $C - 1 = K$, la $\boxed{\text{soluzione generale}}$ dell'equazione lineare (1) è data da
$$\boxed{y_K(x) = Ke^{-\frac{x^3}{3}} + 1, \qquad K \in \mathbb{R}} \tag{3}$$
L'equazione (1) ha un'unica soluzione costante, $y_0 = 1$, che si ottiene da (3) per $K = 0$.

(b) *Prima soluzione.*

Tenendo conto del fatto che $\overline{y}$ soddisfa l'equazione (1) e che $\overline{y}(0) = 2$, abbiamo:

$$\begin{aligned} &\overline{y}' = -x^2\overline{y} + x^2 && \overline{y}'(0) = 0 \\ &\overline{y}'' = -2x\overline{y} - x^2\overline{y}' + 2x && \overline{y}''(0) = 0 \\ &\overline{y}''' = -2\overline{y} - 2x\overline{y}' - 2x\overline{y}' - x^2\overline{y}'' + 2 && \overline{y}'''(0) = -4 + 2 = -2 \end{aligned}$$

Dunque il $\boxed{\text{polinomio di Maclaurin di ordine tre}}$ di $\overline{y}$ è $\boxed{2 - \dfrac{x^3}{3}}$

(b) *Seconda soluzione.* Dall'espressione della soluzione generale (3) segue che la soluzione particolare $\overline{y}$ è data da
$$\overline{y} = e^{-\frac{x^3}{3}} + 1 \tag{4}$$
Per $x \to 0$, $e^{-\frac{x^3}{3}} = 1 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Dunque il polinomio di Maclaurin di ordine tre di $e^{-\frac{x^3}{3}} + 1$ è $\boxed{2 - \dfrac{x^3}{3}}$

(c) Dall'espressione della soluzione generale (3) segue che, per ogni soluzione non costante $y_K(x)$ $(K \neq 0)$, il polinomio di Maclaurin di ordine tre è dato da
$$(1 + K) - \frac{Kx^3}{3}$$

Quindi, ogni soluzione non costante

$$\boxed{y_K(x) = Ke^{-\frac{x^3}{3}} + 1, \qquad K \neq 0} \tag{5}$$

dell'equazione (1) ha in $x_0 = 0$ un punto di flesso.

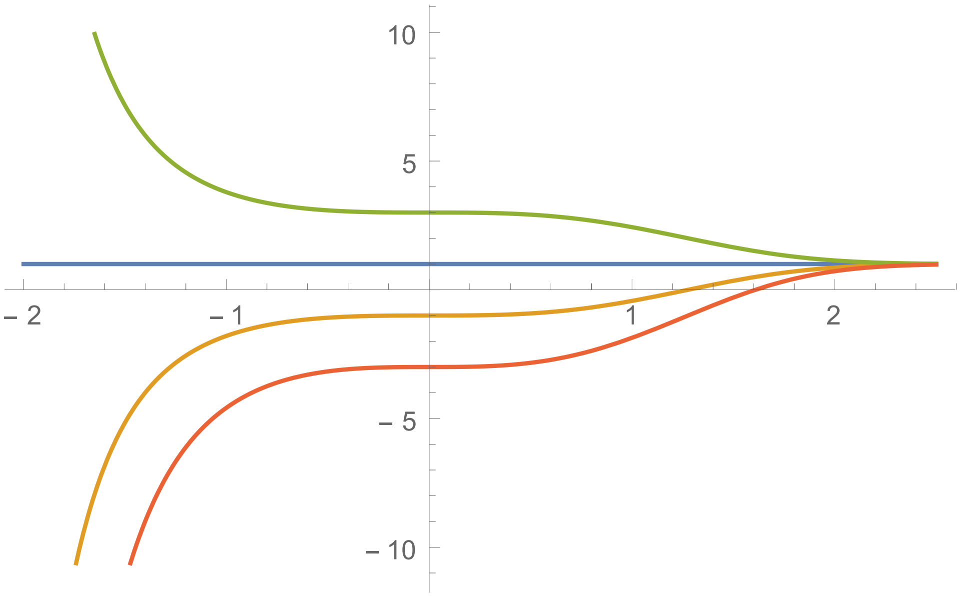


Figura 1: Grafici di $Ke^{-x^3/3}+1$, per $K = 2, 0, -2, -4$. Tutte le soluzioni $Ke^{-x^3/3}+1$ non costanti, cioè con $K \neq 0$, hanno un flesso in $x = 0$.

4. Si consideri la curva γ in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t \\ z = 1 + t - 2t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) Verificare che la curva γ è piana e determinare una equazione cartesiana del piano π che la contiene.

(b) Determinare una equazione del piano rettificante della curva γ nel punto $P = (1, 1, 0)$.

Soluzione

(a) Consideriamo l'equazione di un generico piano $ax+by+cz+d = 0$ (con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$). La condizione necessaria e sufficiente affinché il piano contenga la curva γ è che risulti $at^3+bt+c(1+t-2t^3)+d = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ossia che risulti $(a - 2c)t^3 + (b + c)t + c + d = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ciò si verifica se e solo se il polinomio precedente nell'indeterminata t è il polinomio nullo, ossia se e solo se $a = 2c$, $b = -c$ e $d = -c$. Ciò si verifica per infiniti valori proporzionali non tutti nulli di a,b,c e d – ad esempio per $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ e $d = -1$ – che corrispondono a un unico piano che contiene la curva γ: il piano di equazione $\boxed{2x - y + z - 1 = 0}$. Tale piano è il piano osculatore alla curva γ in un suo qualsiasi punto.

(b) Il punto $P = (1, 1, 0)$ corrisponde al valore $t = 1$ del parametro. Posto $\mathbf{r}(t) = (t^3, t, 1 + t - 2t^3)$, risulta $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, 1, 1 - 6t)$ e quindi $\mathbf{r}'(1) = (3, 1, -5)$. La tangente a γ in P ha quindi la direzione del vettore $\mathbf{v} = (3, 1, -5)$. Il piano rettificante della curva γ nel punto $P = (1, 1, 0)$ è parallelo sia a $\mathbf{v} = (3, 1, -5)$ sia a $\mathbf{w} = (2, -1, 1)$ (vettore ortogonale al piano osculatore). Quindi un vettore ortogonale al piano rettificante in P è $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (-4, -13, -5)$. Un'equazione del piano rettificante in P è quindi $-4(x - 1) - 13(y - 1) - 5z = 0$, equivalente a $\boxed{4x + 13y + 5z - 17 = 0.}$

Soluzione alternativa: nel fascio di piani che hanno come sostegno la retta tangenta a γ in P, si cerca quello ortogonale al piano osculatore π di equazione $2x - y + z - 1 = 0$.