Dom. 1	Dom 2	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Secondo appello** **05 luglio 2017**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Prima parte

a. Dimostrare: *Se una funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è derivabile in* x_0*, allora è differenziabile in* x_0. (3 punti)

b. Enunciare e dimostrare il teorema sulla derivata della funzione reciproca $1/f(x)$. (3 punti)

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 Secondo appello 05 luglio 2017	Docente:	Numero di iscrizione all'appello:
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Seconda parte

Punteggi degli esercizi: Es. 1: 5=2+3; Es. 2: 6=3+3; Es.3: 6=4+2; Es.4: 7=1+1+2+1+2.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. (a) Scrivere la formula di Taylor, centrata in $x_0 = 0$, arrestata al quarto ordine, con il resto nella forma di Peano, della funzione $g(x) = e^{-x^2/2} - \cos x$.

(b) Stabilire per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^\alpha} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua in $x_0 = 0$.

Soluzione.

(a) Ricordando gli sviluppi dell'esponenziale e del coseno, si ha:

$$e^{-x^2/2} - \cos x = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)) = \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)$$

Dunque, la formula di Taylor cercata è

$$e^{-x^2/2} - \cos x = \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)$$

(Se si scrivesse $o(x^4)$, invece di $o(x^5)$, la formula sarebbe ancora corretta; ma scrivendo $o(x^5)$ si dà un'informazione più precisa).

(b) La funzione f è continua in $x_0 = 0$ se, e solo se, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ora:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^\alpha} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{12} x^{4-\alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

se, e solo se, $4 - \alpha > 0$. (Infatti, se $\alpha = 4$ il limite vale $1/12$, mentre se $\alpha > 4$ i limiti per $x \to 0^-$ e per $x \to 0^+$ non sono finiti). Quindi la funzione è continua se, e solo se, $\alpha < 4$.

2. Sia r la retta rappresentata dalle equazioni cartesiane

$$r: \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

e sia π il piano parallelo a r che passa per i punti $A=(0,0,0)$ e $B=(1,1,1)$.

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π.

(b) Trovare gli eventuali punti che stanno sulla retta r e distano 1 dal punto $A=(0,0,0)$.

Soluzione:

(a) Equazioni parametriche della retta r sono:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-t \\ z=t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Il piano π ha equazione del tipo:

$$ax+by+cz+d=0$$

Imponendo il passaggio per A e B si ottiene:

$$ax+by+(-a-b)z=0$$

Imponendo poi la condizione di perpendicolarità tra i parametri direttori di r e i coefficienti di π si ottiene:

$$0a+(-1)b+1(-a-b)=0 \quad \Rightarrow \quad a=-2b$$

Quindi un'equazione cartesiana del piano cercato è

$$2x-y-z=0$$

(b) Il quadrato della distanza del generico punto $P=(1/2,1/2-t,t)$ della retta r dall'origine $(0,0,0)$ è

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+t^2$$

La distanza di P dall'origine è 1 se, e solo se, $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+t^2$. Questa uguaglianza è verificata per

$$t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

Quindi i punti cercati sono

$$P_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right), \qquad P_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{4},\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right).$$

3. (a) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -7x^6 y^2 \\ y(0) = \beta \end{cases} \tag{1}$$

dove $\beta \in \mathbb{R}$.

Trovare le soluzioni del problema di Cauchy (1) quando $\beta = 0$ e quando $\beta = 1$, specificando i relativi intervalli massimali (contenenti 0) sui quali tali soluzioni si possono estendere.

(b) Scrivere la formula di Taylor, centrata in $x_0 = -1$, arrestata al primo ordine, con il resto nella forma di Peano, della funzione $g(x) = 1 + x^7$.

La funzione $\dfrac{1}{1+x^7}$ è integrabile, in senso generalizzato, in un intorno destro di $x_0 = -1$?

Motivare la risposta.

Soluzione

(a) L'equazione $y' = -7x^6 y^2$ è a variabili separabili.

L'unica soluzione costante è $y(x) = 0$, che soddisfa il problema di Cauchy per $\beta = 0$. Ovviamente l'intervallo massimale sul quale tale soluzione costante si può estendere è tutto $\mathbb{R}$.

Cerchiamo ora la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$. Separiamo le variabili dividendo per y^2. (Poiché la soluzione cercata deve soddisfare la condizione iniziale $y(0) = 1$, per continuità $y(x)$ dovrà mantenersi diverso da zero in tutto un opportuno intorno di 0. Quindi, almeno in un opportuno intorno di 0, si può dividere per y^2). Otteniamo allora:

$$\frac{dy}{y^2} = -7x^6\, dx$$

da cui segue, integrando:

$$-\frac{1}{y} = -x^7 + C$$

La condizione iniziale $y(x) = 1$ impone $C = -1$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{1+x^7} \tag{2}$$

Il denominatore $1 + x^7$ di (2) si annulla in $x = -1$. Quindi l'intervallo massimale, contenente il punto $x_0 = 0$, sul quale si può estendere la soluzione (2) del problema di Cauchy (1) è $(-1, +\infty)$.

(b) La formula di Taylor di $g(x) = 1 + x^7$, arrestata al primo ordine, con il resto nella forma di Peano, è $g(-1) + g\prime(-1)(x+1) + o(x+1)$, ossia $(g(-1) = 0,\ g\prime(-1) = 7)$:

$$1 + x^7 = 7(x+1) + o(x+1)$$

Dunque, per $x \to -1^+$, vale la relazione di asintoticità:

$$\frac{1}{1+x^7} \sim \frac{1}{7(x+1)} \qquad \text{per } x \to -1^+$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la funzione $y(x) = \dfrac{1}{1+x^7}$ non è integrabile in senso generalizzato in un intorno destro di -1.

4. Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x - 6}}{|x|}.$$

Determinare:

(a) Il campo di esistenza della funzione f;

(b) Gli eventuali punti del dominio di f in cui la funzione $f(x)$ non è derivabile;

(c) I punti del dominio di f in cui f assume un massimo locale o un minimo locale;

(d) I limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

(e) Il grafico qualitativo della funzione.

Soluzione

(a) Campo di esistenza della funzione f: $(-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$.

(b) Per ogni x nell'aperto $(-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$ la funzione f è derivabile e la derivata è

$$f'(x) = \text{segno}(x) \frac{1}{x^2} \frac{5x + 12}{2\sqrt{x^2 - 5x - 6}}$$

La funzione non è derivabile in -1 e in 6.

(c) La derivata si annulla in $x = -\frac{12}{5}$ ed è positiva per $x > 6$ e $x < -\frac{12}{5}$. Il punto $-\frac{12}{5}$ è un punto di massimo locale (anche globale). Nei punti -1 e 6 la funzione f assume il minimo globale zero.

(d) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, quindi la funzione ha l'asintoto orizzontale $y = 1$ sia per $x \to +\infty$, sia per $x \to -\infty$.

(e) Grafico di f: