Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Secondo compito in itinere – 1° Febbraio 2016**

Cognome: ______________________ **Compito A**

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Es. 1: 8 punti	**Es. 2**: 8 punti	**Es. 3**: 10 punti	**Totale**

1. Sia data, per ogni valore del parametro reale α, la funzione definita da
$$f_\alpha(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{x}\, \mathrm{e}^{-\alpha x}\,, \qquad x \in [1,+\infty).$$
   (a) Stabilire per quali valori di α converge l'integrale
$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
   (b) Calcolare il valore dell'integrale per $\alpha = 0$.

2. (a) Scrivere lo sviluppo di MacLaurin del 4° ordine con resto secondo Peano della funzione definita da
$$y(x) = \mathrm{e}^{x^2} - 1 + \log(1-2x)\,.$$
   (b) Calcolare, al variare del parametro α, con $\alpha > 0$, il limite
$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)}{x^\alpha + x^{2\alpha}}\,.$$

3. Sia γ la curva rappresentata dalla funzione vettoriale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$f(t) = (2t + \cos t, 2 - \sin t, t)$$
   e sia π il piano rettificante di γ nel punto $P_0 \equiv (1,2,0)$.
   (a) Verificare che la curva è semplice e regolare.
   (b) Determinare l'equazione del piano π.
   (c) Nel fascio di piani che contengono la retta tangente a γ in P_0, individuare quelli che formano con π un angolo di $30°$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *90 minuti.*

Soluzioni

1. (a) La funzione f_α é continua su tutto l'intervallo di integrazione. Inoltre, f_α é positiva sull'intervallo $(1, +\infty)$. È pertanto possibile applicare il criterio del confronto asintotico. Poiché, per $x \to +\infty$, si ha
$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2x^{3/2}}\, \mathrm{e}^{-\alpha x},$$
si ha quindi che I_α converge se e solo se $\alpha \geq 0$, e I_α diverge se e solo se $\alpha < 0$.

(b) Per $\alpha = 0$, si ha l'integrale
$$I_0 = \int_1^{+\infty} f_0(x)\, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{x}\, \mathrm{d}x\,.$$
Poiché
$$\int \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{x}\, \mathrm{d}x = 2\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}\right) + \ln\left(\frac{x}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}\right) + cost$$
si ha
$$\begin{aligned}
I_0 &= \lim_{\alpha \to +\infty} \int_1^\alpha \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{x}\, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\alpha \to +\infty} \left[2\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}\right) + \ln\left(\frac{x}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}\right)\right]_1^\alpha \\
&= \lim_{\alpha \to +\infty} \left[2\left(\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{\alpha}\right) + \ln\left(\frac{\alpha}{\left(\sqrt{1+\alpha}+1\right)^2}\right)\right] - 2(\sqrt{2}-1) - \ln\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right) \\
&= 2\ln(\sqrt{2}+1) - 2(\sqrt{2}-1)\,.
\end{aligned}$$

2. (a) Poiché, per $t \to 0$, si hanno gli sviluppi
$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2)$$
$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)\,,$$
per $x \to 0$, si ha
$$\mathrm{e}^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$
e
$$\ln(1-2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \frac{(-2x)^4}{4} + o(x^4) = -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}\,x^3 - 4x^4 + o(x^4)\,.$$
Pertanto, per $x \to 0$, si ha
$$y(x) = -2x - x^2 - 8\frac{x^3}{3} - 7\frac{x^4}{2} + o(x^4)\,.$$
Osservazione. In alternativa si poteva applicare la formula di MacLaurin e calcolare tutte le derivate nell'origine. Il risultato è ovviamente lo stesso.

(b) Calcolare, al variare del parametro α, con $\alpha > 0$, il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)}{x^\alpha + x^{2\alpha}}\,.$$

Utilizzando lo sviluppo ottenuto nel punto precedente, si ha

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x^\alpha + x^{2\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x + o(x)}{x^\alpha(1 + x\alpha)} = -2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} -2 & \text{per } \alpha = 1 \\ 0 & \text{per } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{per } \alpha < 1\,. \end{cases}$$

3. (a) Una curva è semplice quando la funzione vettoriale f che la parametrizza è iniettiva. Nel nostro caso, ciò è facilmente verificabile osservando che la terza componente è (ovviamente) iniettiva. Una curva è regolare quando $f'(t)$ è sempre diverso dal vettore nullo. Nel nostro caso $f'(t) = (2 - \sin t, -\cos t, 1) \neq \mathbf{0}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, poiché la terza componente è sempre diversa da zero.

(b) Il punto P_0 corrisponde al valore $t = 0$. Poiché $f'(t) = (2 - \sin t, -\cos t, 1)$ e $f''(t) = (-\cos t, \sin t, 0)$, si ha $f'(0) = (2, -1, 1)$ e $f''(0) = (-1, 0, 0)$. Pertanto, si ottiene $f'(0) \wedge f''(0) = (0, -1, -1)$. Poiché tale vettore individua la direzione della retta binormale di γ in P_0, il vettore $(0, -1, -1) \wedge f'(0) = (0, -1, -1) \wedge (2, -1, 1) = (-2, -2, 2)$ individua la direzione della retta normale, che è perpendicolare al piano rettificante. Pertanto, il piano rettificante ha equazione $-2(x - 1) - 2(y - 2) + 2z = 0$, ossia $\pi : x + y - z - 3 = 0$.

(c) La retta tangente a γ in P_0 è la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = t\,. \end{cases}$$

Eliminando il parametro t (utilizzando la terza equazione), si ottiene la retta r come intersezione dei due piani di equazione $x = 1 + 2z$ e $y = 2 - z$. Il fascio ϕ di piani che ha la retta r come sostegno ha equazione

$$\lambda(x - 2z - 1) + \mu(y + z - 2) = 0$$

ossia

$$\lambda x + \mu y + (-2\lambda + \mu)z - \lambda - 2\mu = 0$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. L'angolo fra il piano π e il generico piano $\pi' \in \Phi$ è l'angolo θ tale che

$$\cos\theta = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle|}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}'\|}\,,$$

dove $\mathbf{a}$ è un vettore ortogonale a π e $\mathbf{a}'$ è un vettore ortogonale a π'. Scelti $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$ e $\mathbf{a}' = (\lambda, \mu, -2\lambda + \mu)$, si ha che $\theta = 30°$ se e solo se

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\theta = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle|}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}'\|} = \frac{3|\lambda|}{\sqrt{3}\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + (-2\lambda + \mu)^2}} = \frac{\sqrt{3}|\lambda|}{\sqrt{5\lambda^2 - 4\lambda\mu + 2\mu^2}}\,,$$

ossia se e solo se $\sqrt{5\lambda^2 - 4\lambda\mu + 2\mu^2} = 2|\lambda|$, ossia se e solo se $\lambda^2 - 4\lambda\mu + 2\mu^2 = 0$. Quest'ultima equazione ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = (2 \pm \sqrt{2})\mu_{1,2}$. Sostituendo questi valori nell'equazione del del fascio Φ, si ottengono le equazioni dei due piani cercati.