Dom. 1	Dom 2	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Terzo appello** **05 settembre 2016 Compito A**	**Docente:**	**Numero nell'elenco degli iscritti:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Prima parte

1. Nel campo complesso $\mathbb{C}$, l'equazione $\overline{z} = z$ ha infinite soluzioni.

   V

   (L'insieme delle soluzioni è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.)

2. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è limitata.

   V

   (Segue dal Teorema di Weierstrass.)

3. In $\mathbb{R}^3$, il prodotto vettoriale dei vettori di componenti $(2, 1, -3)$ e $(-4, -2, 6)$ è il vettore nullo.

   V

   (I due vettori sono multipli uno dell'altro.)

Analisi e Geometria 1 Secondo appello 05 settembre 2016 Compito A	Docente:	Numero nell'elenco degli iscritti:
Cognome:	Nome:	Matricola:

Seconda parte

a. (*Continuità della funzione integrale*). Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, limitata e Riemann-integrabile. Dimostrare che la funzione $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ è continua in $[a, b]$. (4 punti)

b. Dare la definizione di *norma* (o *lunghezza*) di un vettore di $\mathbb{R}^n$. (2 punti)

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Secondo appello** **05 settembre 2016 Compito A**	**Docente:**	**Numero nell'elenco degli iscritti:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Terza parte

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6=3+3; Es.2: 9= 3+2+1+1+2; Es.3: 6=4+1+1; Es.4: 5.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. (a) Scrivere in forma trigonometrica i tre numeri: $(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i)^5$; $(1-i)^7$; $\dfrac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5}{(1-i)^7}$.

   (b) Scrivere in forma trigonometrica tutti i numeri complessi z che soddisfano l'equazione:

$$z^2 = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5}{(1-i)^7}$$

Soluzione. Posto $v = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ e $w = 1-i$, abbiamo:

$$v = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = 1\left(cos\frac{5}{6}\pi + i\ \sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$w = 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\ \sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

Quindi:

$$v^5 = 1\left(\cos\frac{25}{6}\pi + i\ \sin\frac{25}{6}\pi\right) = 1\left(\cos\frac{1}{6}\pi + i\ \sin\frac{1}{6}\pi\right)$$

$$w^7 = \sqrt{2^7}\left(\cos\frac{49}{4}\pi + i\ \sin\frac{49}{4}\pi\right) = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi + i\ \sin\frac{1}{4}\pi\right)$$

Il rapporto vale quindi:

$$\frac{v^5}{w^7} = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{1}{12}\pi\right) + i\ \sin\left(-\frac{1}{12}\pi\right)\right]$$

Le due radici quadrate di v^5/w^7 sono allora date da:

$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt[4]{2^3}}\left[\cos\left(-\frac{1}{24}\pi\right) + i\ \sin\left(-\frac{1}{24}\pi\right)\right]$$

$$z_2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{2^3}}\left[\cos\frac{23}{24}\pi + i\ \sin\frac{23}{24}\pi\right]$$

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}\,.$$

(a) Determinare gli eventuali asintoti di f.

(b) Stabilire se f è strettamente crescente.

(c) Stabilire se f è invertibile.

(d) Utilizzando solo le informazioni ottenute nei punti precedenti, disegnare il grafico di f.

(e) Stabilire se è convergente l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \Big(x - f(x)\Big)\, dx\,.$$

Soluzione.

(a) Essendo definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, la funzione f non possiede asintoti verticali. Inoltre, per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = 2x - \sqrt{1+x^2} \sim 2x - |x|$, ossia $f(x) \sim x$ per $x \to +\infty$ e $f(x) \sim 3x$ per $x \to -\infty$. Pertanto, f non possiede asintoti orizzontali, essendo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x = -\infty\,,$$

ma possiede la retta di equazione $y = x$ come asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e la retta di equazione $y = 3x$ come asintoto obliquo per $x \to -\infty$, essendo

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{1+x^2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} = 0$$

e

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x\to-\infty} (-x - \sqrt{1+x^2}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-x + \sqrt{1+x^2}} = 0$$

(b) La funzione f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e la sua derivata prima è

$$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

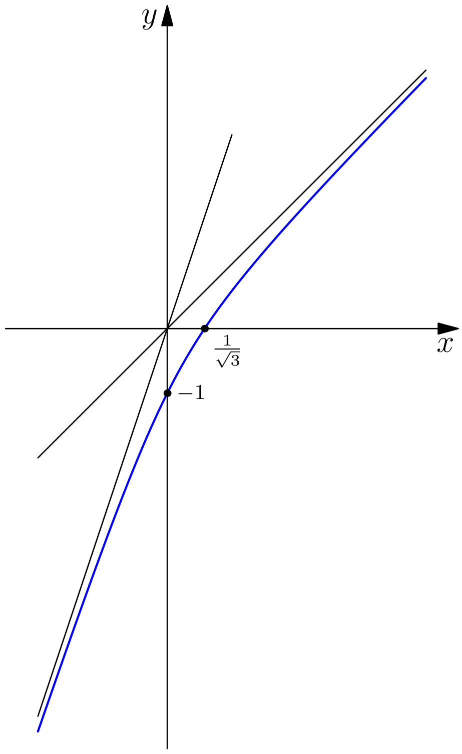
Chiaramente, $f'(x) > 0$ per ogni $x \leq 0$. Inoltre, essendo $1 + x^2 \geq x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed essendo $\sqrt{x}$ una funzione crescente per ogni $x > 0$, si ha $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| = x$ per ogni $x > 0$. Quindi, si ha

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x}{x} = 1$$

per ogni $x > 0$, ossia $f'(x) \geq 1 > 0$ per ogni $x > 0$. Pertanto, $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed f è strettamente crescente.

(c) Poiché è strettamente crescente, f è invertibile.

(d) Il grafico di f è



(e) La funzione integranda

$$g(x) = x - f(x) = -x + \sqrt{1+x^2}$$

è definita, è continua ed è positiva su tutto l'intervallo di integrazione $[0, +\infty)$. Inoltre, per $x \to +\infty$, si ha

$$g(x) = \sqrt{1+x^2} - x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} \sim \frac{1}{2}\,\frac{1}{x}\,.$$

Poiché la funzione $1/x$ non è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico nemmeno la funzione g è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$. Quindi l'integrale improprio I non è convergente (ma divergente a $+\infty$).

3. Si consideri la curva paramerizzata $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) = \big(\sin(t)\cos(t),\, \sin(t)^2,\, \cos(t)\big)\,, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Detto P_0 il punto della curva α corrispondente al valore $t = 0$ del parametro, si trovino:

(a) La terna fondamentale $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ nel punto P_0.

(b) Un'equazione cartesiana del piano osculatore in P_0.

(c) La curvatura in P_0.

Soluzione. (a) Il vettore velocità è dato da $\alpha'(t) = (\cos 2t, \sin 2t, -\sin t)$. In $t = 0$,

$$\alpha'(0) = (1, 0, 0) = \mathbf{T}(0)$$

Il vettore accelerazione è dato da $\alpha''(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, -\cos t)$, quindi $\alpha''(0) = (0, 2, -1)$. Poiché si vede che, in questo caso particolare, $\alpha''(0)$ è ortogonale a $\mathbf{T}(0)$, otteniamo subito il vettore normale $\mathbf{N}(0)$ normalizzando $\alpha''(0)$:

$$\mathbf{N}(0) = \frac{1}{|\alpha''(0)|}\alpha''(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1) = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

(*Altro modo per trovare* $\mathbf{N}(0)$. Si normalizza $\alpha' \times \alpha''$, in questo modo ottenendo $\mathbf{B}$. Poi si trova $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$.) Il vettore binormale è dato dal prodotto vettoriale:

$$\mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0) = (1, 0, 0) \times \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(b) Il piano osculatore cercato è il piano che passa per $\alpha(0) = (0, 0, 1)$ ed è ortogonale a (un multiplo non-nullo di) $\mathbf{B}(0)$. Una sua equazione cartesiana è

$$0(x - 0) + 1(y - 0) + 2(z - 1) = 0$$

ossia $y + 2z - 2 = 0$.

(c) La curvatura in $t = 0$ è data da

$$k(0) = \frac{|\alpha'(0) \times \alpha''(0)|}{|\alpha'(0)|^3} = \frac{|(0, 1, 2)|}{1^3} = \sqrt{5}$$

Metodo alternativo per trovare la curvatura. Il vettore derivata seconda (accelerazione) $\alpha''(t)$ si scrive come combinazione lineare di $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$ nel modo seguente:

$$\alpha''(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2 k\mathbf{N}$$

dove $v = v(t) = |\alpha(t)|$ è la velocità scalare e k la curvatura. In $t = 0$, la componente tangenziale $\dfrac{dv}{dt}\mathbf{T}$ è nulla, e quindi

$$\alpha''(0) = v^2 k\mathbf{N}(0)$$

Poiché $v = |\alpha'(0)| = 1$ e $|\alpha''(0)| = \sqrt{5}$, si ricava $k = \sqrt{5}$.

4. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore del seguente limite di successione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(n^\alpha)}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}.$$

Soluzione. Stimiamo pima il numeratore. Si ha

$$\arctan(n^\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{se} \quad \alpha > 0 \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{se} \quad \alpha = 0 \\ n^\alpha & \text{se} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il denominatore, si vede che

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2} = (\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} = \frac{4}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^{-1/2}.$$

Quindi

$$\frac{\arctan(n^\alpha)}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}n^{1/2} & \text{se} \quad \alpha > 0 \\ \dfrac{\pi}{8}n^{1/2} & \text{se} \quad \alpha = 0 \\ \dfrac{1}{2}n^{\alpha+1/2} & \text{se} \quad \alpha < 0, \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(n^\alpha)}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}} = \begin{cases} +\infty & \alpha > -1/2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad \alpha = -\dfrac{1}{2} \\ 0^+ & \text{se} \quad \alpha < -1/2. \end{cases}$$