

Dom. 1	Dom 2	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale
Analisi e Geometria 1 Secondo appello 06 luglio 2016 Compito A		Docente:			Numero Alfabetico:	
Cognome:		Nome:			Matricola:	

Prima parte

1. L'insieme $[0, 1)$ ammette massimo.

 F

2. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto estremo locale per f .

 F

3. I vettori di componenti $(1, 0, 1)$ e $(-1, 1, 1)$ sono ortogonali.

 V

Analisi e Geometria 1 Secondo appello 06 luglio 2016 Compito A	Docente:	Numero Alfabetico:
Cognome:	Nome:	Matricola:

Seconda parte

- a.** Enunciare e dimostrare la formula di Taylor con il resto nella forma di Peano. (4 punti)

- b.** Scrivere l'equazione parametrica di una retta in \mathbb{R}^3 perpendicolare al piano $x = 0$. (2 punti)

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale
Analisi e Geometria 1 Secondo appello 06 luglio 2016 Compito A		Docente:		Numero Alfabetico:
Cognome:		Nome:		Matricola:

Terza parte

Punteggi degli esercizi: Es. 1: 5; Es. 2: 6=3+3; Es.3: 6=4+2; Es.4: 9=3+2+1+1+2.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore del seguente limite di funzione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x} \right).$$

Soluzione: Utilizzando lo sviluppo di Mac-Laurin della funzione $x \mapsto \sin x$ (arrestato al III° ordine), abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^\alpha} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x} \right) &= x^{-\alpha} \frac{(\sin x)^2 - x^2}{x \sin x} = x^{-\alpha} \frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 - x^2}{x(x + o(x))} \\ &= x^{-\alpha} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2}{x(x + o(x))} = x^{-\alpha} \frac{x^4 \left(-\frac{1}{3} + o(1)\right)}{x^2(1 + o(1))} \\ &= x^{2-\alpha} \frac{\left(-\frac{1}{3} + o(1)\right)}{(1 + o(1))} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2, \\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = 2, \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Sia r la retta rappresentata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

e sia π il piano parallelo a r che passa per i punti $A \equiv (2, 1, -1)$ e $B \equiv (1, 3, 1)$.

(a) Determinare una equazione del piano π .

(b) Determinare i punti P della retta r per i quali il triangolo APB è rettangolo in P .

Soluzione: (a) Nel fascio di piani che ha per sostegno la retta AB , cerchiamo quello parallelo a r . La retta AB è rappresentata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases} .$$

Ricavando t dalla prima equazione e sostituendo nelle altre due, si ottengono le equazioni $2x + y - 5 = 0$ e $2x + z - 3 = 0$, che rappresentano due piani che contengono la retta AB . Il fascio dei piani che contengono la retta AB è allora rappresentato dalla equazione $2x + y - 5 + k(2x + z - 3) = 0$, equivalente a

$$(2 + 2k)x + y + kz - 5 - 3k = 0 .$$

In realtà, tale rappresentazione esclude il piano di equazione $2x + z - 3 = 0$, che però non è parallelo alla retta r e di conseguenza non è il piano cercato. Il generico piano del fascio è parallelo alla retta r se e solo se il vettore $\mathbf{n} = (2 + 2k, 1, k)$ — ad esso ortogonale — è ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (2, 1, 2)$ — che è parallelo a r — e ciò avviene se e solo se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, ossia se e solo se $4 + 4k + 1 + 2k = 0$, cioè se e solo se $k = -\frac{5}{6}$. Sostituendo tale valore di k nell'equazione del fascio e semplificando, si ottiene l'equazione

$$2x + 6y - 5z - 15 = 0 ,$$

che rappresenta il piano π .

(b) Sia $P \equiv (1 + 2t, 3 + t, 2t)$ il generico punto della retta r . Il triangolo APB è rettangolo in P se e solo se i vettori \overrightarrow{AP} e \overrightarrow{BP} sono ortogonali, cioè se e solo se il loro prodotto scalare è nullo. Poiché risulta $\overrightarrow{AP} = (1 + 2t, 3 + t, 2t) - (2, 1, -1) = (2t - 1, t + 2, 2t + 1)$ e $\overrightarrow{BP} = (1 + 2t, 3 + t, 2t) - (1, 3, 1) = (2t, t, 2t - 1)$, abbiamo che $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 9t^2 - 1$, per cui il prodotto scalare $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ si annulla se e solo se $t = 1/3$ oppure $t = -1/3$. Questi due valori del parametro t corrispondono rispettivamente ai due punti

$$P_1 \equiv \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3} \right) \quad \text{e} \quad P_2 \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{2}{3} \right) ,$$

che sono i punti cercati.

3. Disegnare sul piano di Gauss il luogo dei punti A e il luogo dei punti B :

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} : \frac{|z+1|}{|z-i|} = 2 \right\},$$
$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{3} \right\}.$$

Risolvere quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{|z+1|}{|z-i|} = 2 \\ \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Soluzione: Moltiplicando per $|z-i|$ e ponendo $z = x + iy$ si ottiene:

$$|(x+1) + iy| = 2|x + i(y-1)|$$

Calcolando i moduli e ed elevando al quadrato si ottiene:

$$(x+1)^2 + y^2 = 4[x^2 + (y-1)^2]$$
$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}y + 1 = 0$$

Quindi l'insieme A la circonferenza di centro $\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i$ e raggio $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

L'insieme B è una retta verticale, che passa per il centro della circonferenza A . Allora, pensando alla figura, il sistema si risolve facilmente: poiché il raggio è $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, le soluzioni del sistema sono i due punti z_1 e z_2 che si ottengono sommando e sottraendo $i\frac{2}{3}\sqrt{2}$ al centro $\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i$:

$$z_1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i \right) + \frac{2}{3}\sqrt{2}i = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(2 + \sqrt{2})i$$
$$z_2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i \right) - \frac{2}{3}\sqrt{2}i = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(2 - \sqrt{2})i$$

4. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = e^{\frac{1}{4-x^2}}.$$

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$$

- Determinare gli eventuali asintoti di f .
- Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione f .
- Senza calcolare la derivata seconda, disegnare il grafico di f .
- Determinare l'immagine di f .
- Stabilire se l'integrale improprio

$$I = \int_2^{+\infty} (1 - f(x)) dx$$

converge.

Soluzione: ($k = 2$) La funzione f è pari. Quindi basta studiarla per $x \geq 0$.

- La funzione f è definita solo per $x \neq \pm k$. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^+} e^{\frac{1}{k^2-x^2}} = 0 & \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^-} e^{\frac{1}{k^2-x^2}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-k)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-k)^+} e^{\frac{1}{k^2-x^2}} = +\infty & \lim_{x \rightarrow (-k)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-k)^-} e^{\frac{1}{k^2-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, f ha come asintoto verticale la retta di equazione $x = k$ per $x \rightarrow k^-$ e ha come asintoto verticale la retta di equazione $x = -k$ per $x \rightarrow (-k)^+$. Inoltre, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{k^2-x^2}} = 1.$$

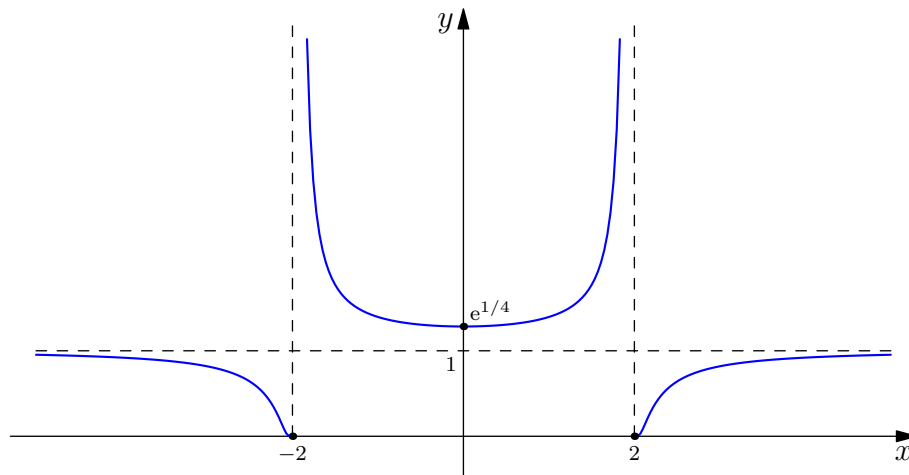
Quindi f possiede anche un asintoto orizzontale, di equazione $y = 1$, per $x \rightarrow \pm\infty$.

- La funzione f è derivabile per ogni $x \neq \pm k$ e la sua derivata prima è

$$f'(x) = \frac{2kx}{(k^2 - x^2)^2} e^{\frac{1}{k^2-x^2}}.$$

Pertanto, $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$. Quindi f presenta un punto di minimo locale in corrispondenza di $x = 0$, dato da $M \equiv (0, e^{\frac{1}{k^2}})$. Non ci sono altri punti di estremo.

- Il grafico di f è



(d) L'immagine di f è $\text{Im } f = (0, 1) \cup (e^{\frac{1}{k^2}}, +\infty)$.

(e) La funzione

$$g(x) = 1 - f(x) = 1 - e^{\frac{1}{k^2 - x^2}}$$

è definita, continua e positiva su tutto l'intervallo $(k, +\infty)$. Per $x \rightarrow k^+$, la funzione f è limitata (poiché $f(x) \rightarrow 0$, come abbiamo già visto). Inoltre, per $x \rightarrow +\infty$, si ha

$$\frac{1}{k^2 - x^2} \rightarrow 0$$

e quindi

$$g(x) \sim -\frac{1}{k^2 - x^2} \sim \frac{1}{x^2}.$$

Poiché la funzione $1/x^2$ è integrabile in senso improprio per $x \rightarrow +\infty$, per il criterio del confronto asintotico si ha che anche la funzione $g(x)$ è integrabile in senso improprio per $x \rightarrow +\infty$. Pertanto, in conclusione, l'integrale improprio I converge.