Dom. 1	Dom 2	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Primo appello** **16 febbraio 2016**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Scuola di Ingegneria** **Industriale e dell'Informazione**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Prima parte

1. Ogni insieme limitato non vuoto di $\mathbb{R}$ ha un estremo superiore. | V | F |

   (Vero. Per la proprietà di completezza di $\mathbb{R}$.)

2. L'equazione $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = z^5$ ha piú di 5 soluzioni in $\mathbb{C}$. | V | F |

   (Falso. Per il teorema fondamentale dell'algebra, l'equazione ha 5 soluzioni, se contate con la dovuta molteplicità.)

3. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, $x - y = 0$ è l'equazione di un piano. | V | F |

   (Vero.)

Seconda parte

1. Dimostrare: *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è continua e* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *(*$x \in [a, b]$*), allora* F *è derivabile e* $F'(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in [a, b]$. (4 punti)
2. Sia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ (f non necessariamente derivabile). Scrivere la definizione di:

   f *strettamente crescente* sul suo dominio D. (2 punti)

Analisi e Geometria 1 **Appello 1** **16 Febbraio 2016**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Scuola di Ingegneria** **Industriale e dell'Informazione**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Terza parte

Punteggi: Es. 1: 6=4+2; Es. 2: 7=2+2+2+1; Es.3: 7=3+2+2; Es.4: 6=4+2.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. (a) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione: $z^2 = -\overline{z}$

   (b) Riportare le soluzioni sul piano di Gauss:

(a1) *Prima soluzione*

Una soluzione ovvia è $z = 0$. Cerchiamo le soluzioni non nulle. I numeri complessi non nulli si possono scrivere in forma esponenziale come $z = re^{i\vartheta}$. Allora $z^2 = r^2e^{i2\vartheta}$ e $\overline{z} = re^{i(-\vartheta)}$. Il numero -1 si scrive in forma polare come $-1 = e^{i\pi}$. Dunque, l'equazione $z^2 = -\overline{z}$ si scrive:

$$r^2e^{i2\vartheta} = e^{i\pi}\, re^{i(-\vartheta)}$$

ossia

$$r^2e^{i2\vartheta} = re^{i(\pi-\vartheta)}$$

Uguagliando i moduli, otteniamo $r = 0$ (cioè la soluzione nulla) e $r = 1$. Quanto all'argomento delle soluzioni non nulle, si deve avere:

$$2\vartheta = \pi - \vartheta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ossia

$$\vartheta = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

(Attenzione. Non basta scrivere solo: $2\vartheta = \pi - \vartheta$). I valori di ϑ distinti che si ricavano dall'uguaglianza (1), sono i tre che corrispondono a $k = 0, 1, 2$:

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{3}, \qquad \vartheta_1 = \pi, \qquad \vartheta_2 = \frac{5\pi}{3}$$

(Per $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0, 1, 2$, si ottengono di nuovo ciclicamente gli stessi angoli, a meno di multipli interi di 2π.) In definitiva, le soluzioni dell'equazione $z^2 = -\overline{z}$ sono le seguenti quattro:

$$0, \qquad (e^{i\frac{\pi}{3}} =) 1/2 + i\sqrt{3}/2, \qquad (e^{i\pi} =) -1, \qquad (e^{i\frac{5\pi}{3}} =) 1/2 - i\sqrt{3}/2$$

(a2) *Seconda soluzione*

Una soluzione ovvia è $z = 0$. Cerchiamo le soluzioni non nulle. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione $z^2 = -\overline{z}$ per z otteniamo: $z^3 = -z\,\overline{z}$, ossia $z^3 = -|z|^2$. Prendendo i moduli: $|z|^3 = |z|^2$. Poiché stiamo assumendo $z \neq 0$, dividiamo per $|z|$ e otteniamo $|z| = 1$. Dunque l'equazione $z^3 = -|z|^2$ diventa $z^3 = -1$, le cui soluzioni sono le radici cubiche di -1. In definitiva, le soluzioni di $z^2 = -\overline{z}$ sono quattro:

$z_0 = 0$ e le tre radici cubiche di -1, che sono: $z_1 = -1$, $z_2 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, $z_3 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$.

(a3) *Terza soluzione*

Poniamo $z = x + iy$. Allora $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ e $-\overline{z} = -x + iy$. Uguagliando tra loro le due parti reali e le due immaginarie,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -x \\ 2xy = y \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -x \\ y(2x-1) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione $y(2x - 1) = 0$ si ricava $y = 0$ oppure $x = 1/2$. Se $y = 0$, sostituendo nella prima equazione, si ricava $x = 0$ oppure $x = -1$. Quindi due radici sono $(0, 0)$ e $(0, -1)$. Se invece $x = 1/2$, sostituendo nella prima equazione si ha $y = \pm\sqrt{3}/2$. Quindi otteniamo le due radici $(1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(1/2, -\sqrt{3}/2)$. Quindi, le soluzioni di $z^2 = -\overline{z}$ sono quattro:

$z_0 = 0$, $z_1 = -1$, $z_2 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, $z_3 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$.

2. Sia f la funzione definita nel modo seguente:

$$f : (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{x+1} e^{-x}$$

per ogni x nel dominio di f.

(a) Trovare gli eventuali punti di minimo o di massimo locale di f.

(b) Scrivere le equazioni degli (eventuali) asintoti:

(c) Disegnare il grafico di f.

(d) L'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente? Motivare la risposta.

Soluzione

(a) La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{-x^2 - x + 1}{(x+1)^2}\, e^{-x}$$

Si ha:

$$x_0 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} : \qquad \text{Punto di minimo locale.}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} : \qquad \text{Punto di massimo locale.}$$

(b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Gli asintoti sono: $x = -1$ (asintoto verticale) e $y = 0$, asintoto orizzontale a $+\infty$. Non ci sono asintoti obliqui.

(c)

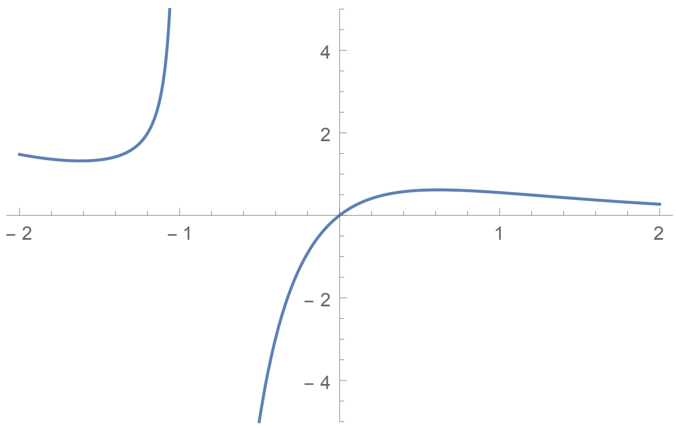

Figure 1: Grafico qualitativo di $f(x) = \frac{x}{x+1} e^{-x}$.

(d)

Su ogni intervallo $[0, b]$, $b > 0$, f è integrabile, perché è continua. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) = \frac{x}{x+1} e^{-x} \sim e^{-x} \tag{2}$$

L'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ è convergente, come si vede facilmente usando la definizione stessa di integrale generalizzato, oppure ricorrendo al criterio del confronto, osservando che, per $x \to +\infty$, si ha definitivamente $e^{-x} < 1/x^2$. Dunque, per il criterio del confronto asintotico, anche l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+1} e^{-x}\, dx$ è convergente.

3. (a) Nello spazio $\mathbb{R}^3$, le due rette

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad\qquad s : \begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ x + 6y + 3z - 10 = 0 \end{cases}$$

sono complanari? In caso affermativo, scrivere un'equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}$ che le contiene.

(b) Le rette r e s sono parallele?

(c) Determinare i punti di r che distano $\sqrt{6}$ dal piano $\mathcal{P}$ di equazione $x + y - 2z + 1 = 0$.

Soluzione.

Un vettore di direzione di r è $(-1, 1, -2)$. Un vettore di direzione di s è dato da

$$\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \right) = (12 : -4 : 4)$$

oppure, dividendo per 4, $(3, -1, 1)$.

Avendo parametri direttori non proporzionali, le due rette r ed s non sono parallele. Intersecando r ed s si ha il sistema

$$\begin{cases} 2 - t + 2 + 2t - 1 + 2t - 6 = 0 \\ 2 - t + 6 + 6t + 3 - 6t - 10 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} t - 1 = 0 \\ t - 1 = 0 \,. \end{cases}$$

Poiché tale sistema è compatibile, avendo come unica soluzione $t = 1$, le due rette r ed s sono incidenti nel punto $P \equiv (1, 2, -1)$.

Essendo incidenti, le due rette r ed s sono complanari. Il piano π che le contiene passa per il punto P e ha come direzione ortogonale quella data dal prodotto vettoriale

$$(1, -1, 2) \times (3, -1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 5, 2)\,.$$

Pertanto, si ha

$$\pi \; : \; 1(x - 1) + 5(y - 2) + 2(z + 1) = 0$$

ossia

$$\pi \; : \; x + 5y + 2z - 9 = 0\,.$$

Consideriamo il generico punto $Q \equiv (2 - t, 1 + t, 1 - 2t)$ della retta r. Allora, si ha

$$\mathbf{d}(Q, \pi') = \frac{|2 - t + 1 + t - 2 + 4t + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{|4t + 2|}{\sqrt{6}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(Q, \pi') = \sqrt{6} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{|4t + 2|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \\ &\Longleftrightarrow \quad |4t + 2| = 6 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4t + 2 = \pm 6 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4t = -2 \pm 6 \\ &\Longleftrightarrow \quad t = -2, 1\,. \end{aligned}$$

Pertanto, si hanno i punti $Q_1 \equiv (4, -1, 5)$ e $Q_2 = P \equiv (1, 2, -1)$.

4. Si consideri la seguente equazione differenziale
$$y'(t) = 2t\left[y(t)^2 - 1\right].$$

a. Trovare la soluzione y che verifica la condizione $y(0) = 2$;

b. Specificare l'intervallo massimale sul quale è definita la soluzione del problema di Cauchy trovata sopra.

Soluzioni

a. L'equazione è a variabili separabili (non lineare). Le soluzioni costanti sono $y(t) \equiv 1$ e $y(t) \equiv -1$, mentre le altre soluzioni si trovano con la separazione di variabili. Poiché
$$\int \frac{1}{\tau^2 - 1} d\tau = \int \left(\frac{1/2}{\tau - 1} - \frac{1/2}{\tau + 1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right| \right) + c$$
si ha
$$\int \frac{y'(t)}{y(t)^2 - 1} dt = \int 2t dt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{y(t) - 1}{y(t) + 1} \right| \right) = t^2 + c$$
La soluzione che cerchiamo deve soddisfare la condizione iniziale $y(0) = 2$. Quindi, in un opportuno piccolo intervallo contenente $t_0 = 0$, la frazione $\frac{y(t)-1}{y(t)+1}$ si mantiene positiva (vicino a 0 il valore della frazione è vicino a $1/3$), quindi possiamo togliere i moduli. Scriviamo allora
$$\ln \left[\left(\frac{y(t) - 1}{y(t) + 1} \right)^{1/2} \right] = t^2 + c$$
Applicando l'esponenziale exp sia al primo sia al secondo membro, otteniamo
$$\left(\frac{y(t) - 1}{y(t) + 1} \right)^{1/2} = e^{t^2 + c} = e^c \, e^{t^2}$$
Elevando a quadrato:
$$\frac{y(t) - 1}{y(t) + 1} = Ce^{2t^2}, \quad C > 0$$
da cui ricaviamo
$$y(t) = \frac{1 + Ce^{2t^2}}{1 - Ce^{2t^2}}.$$
Per determinare la costante C imponiamo la condizione iniziale:
$$y(0) = \frac{1 + C}{1 - C} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad C = \frac{1}{3}.$$
La soluzione cercata si puó quindi rappresentare con la formula analitica
$$y(t) = \frac{3 + e^{2t^2}}{3 - e^{2t^2}}.$$

b. Consideriamo la soluzione del problema di Cauchy che abbiamo trovato:
$$y(t) = \frac{3 + e^{2t^2}}{3 - e^{2t^2}}.$$
Determiniamo il piú grande intervallo contenente $t_0 = 0$ (la condizione del problema di Cauchy è $y(0) = 2$) sul quale tale soluzione è definita. Occorre vedere quando il denominatore $3 - e^{2t^2}$ si annulla. Questo accade quando
$$t = \pm \frac{\sqrt{\ln 3}}{\sqrt{2}}$$
Dunque l'intervallo massimale su quale è definita la soluzione del problema di Cauchy è
$$\left(-\frac{\sqrt{\ln 3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\ln 3}}{\sqrt{2}} \right)$$