Analisi e Geometria 1

Primo Appello – 15 Febbraio 2016

Cognome: ____________________
Nome: ____________________
Matricola: ____________________

Compito B

Es. 1: 6 punti	**Es. 2**: 7 punti	**Es. 3**: 6 punti	**Es. 4**: 7 punti	**Totale**

1. (a) Risolvere il sistema
$$\begin{cases} z^2 + w = 3 \\ w - 2i\bar{z} = 3 \end{cases}$$
dove z e w sono numeri complessi

   (b) Disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

   (a) Trovare gli eventuali punti di minimo o di massimo locale di f .

   (b) Stabilire se esistono asintoti per f e disegnare il grafico di f .

   (c) Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 di f in $x_0 = 0$.

3. (a) Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la soluzione y_a dell problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \,, \qquad x > 0 \\ y(1) = a \,. \end{cases}$$

   (b) Calcolare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il limite
$$L_a = \lim_{x\to 1} \frac{y_a(x) - a}{x - 1} \,.$$

4. (a) Stabilire la posizione reciproca delle rette
$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x + 4y + 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \,. \end{cases}$$

   (b) Siano Φ_1 e Φ_2 i fasci di piani che hanno per sostegno rispettivamente le rette r_1 ed r_2 . Stabilire se esiste un piano che appartiene a entrambi i fasci Φ_1 e Φ_2 .

   (c) Stabilire se il piano $\pi : x + y + z + 1 = 0$ appartiene al fascio Φ_2 .

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. (a) Dalla seconda equazione, si ricava $w = 3 + 2i\bar{z}$. Sostituendo poi nella prima equazione, si ha $z^2 + 3 + 2i\bar{z} = 3$, ossia $z^2 + 2i\bar{z} = 0$ Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, quest'ultima equazione diventa

$$(x + iy)^2 + 2i(x - iy) = 0$$

ossia

$$x^2 + 2ixy - y^2 + 2ix + 2y = 0$$

ossia

$$x^2 - y^2 + 2y + 2ix(y + 1) = 0\,.$$

Perché un numero complesso sia nullo, devono annullarsi sia la parte reale sia la parte immaginaria. Quindi, deve essere

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ 2x(y + 1) = 0\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione, si ha $x = 0$ oppure $y = -1$.

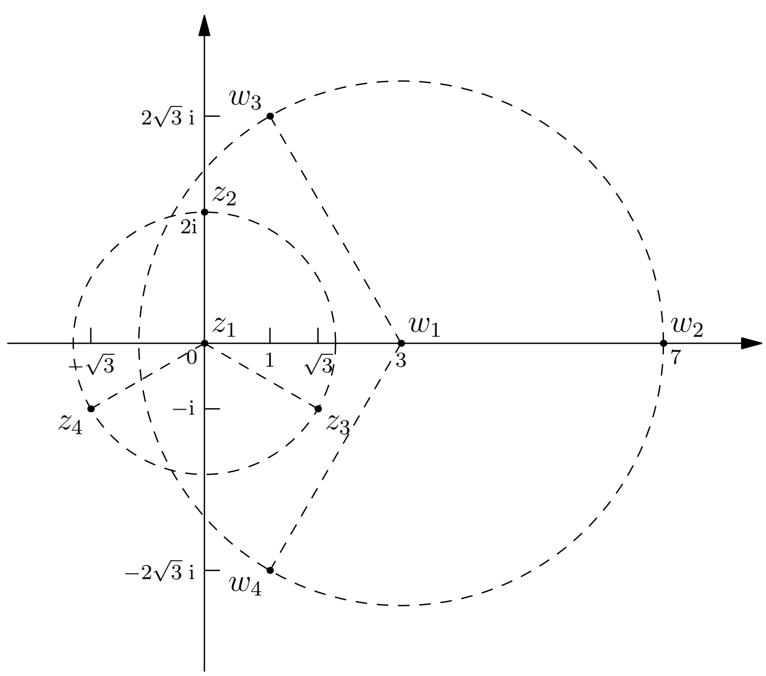
Se $x = 0$, dalla prima equazione si ha $y = 0$ o $y = 2$. Pertanto, in questo caso, si hanno le soluzioni $z_1 = 0$ e $z_2 = 2i$.

Se $y = -1$, dalla prima equazione si ha $x = \pm\sqrt{3}$. Pertanto, in questo caso, si hanno le soluzioni $z_3 = \sqrt{3} - i$ e $z_4 = -\sqrt{3} - i$.

Tenuto conto che $w = 3 + 2i\bar{z}$, le soluzioni del sistema sono le coppie (z_i, w_i), dove

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 & w_1 &= 3 + 2i\bar{z}_1 = 3 \\ z_2 &= 2i & w_2 &= 3 + 2i\bar{z}_2 = 7 \\ z_3 &= \sqrt{3} - i & w_3 &= 3 + 2i\bar{z}_3 = 1 + 2\sqrt{3}\,i \\ z_4 &= -\sqrt{3} - i & w_4 &= 3 + 2i\bar{z}_4 = 1 - 2\sqrt{3}\,i\,. \end{aligned}$$

(b) A questo punto è immediato disegnare gli 8 punti sul piano di Gauss:



Osservazione. Dall'equazione $z^2 = -2\mathrm{i}\bar{z}$, si ha $|z|^2 = |-2\mathrm{i}\bar{z}| = 2|z|$, da cui si ha $|z| = 0$ oppure $|z| = 2$. Di conseguenza, si ha $|w-3| = |2\mathrm{i}\bar{z}| = 2|z|$, ossia $|w-3| = 0$ oppure $|w-3| = 4$. Questo significa che i punti z_2, z_3 e z_4 giacciono sulla circonferenza di centro z_1 e raggio 2, mentre i punti w_2, w_3 e w_4 giacciono sulla circonferenza di centro w_1 e raggio 4.

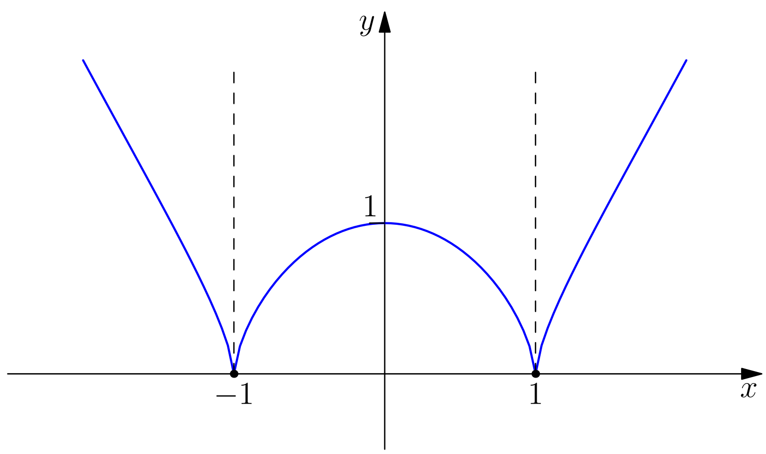
2. Si osservi che la funzione è pari.

   (a) La funzione assume sempre valori positivi, tranne in $x = -1$ e in $x = 1$, dove si annulla. Dunque $x = -1$ e 1 sono punti di minimo assoluto. In tutti i punti diversi da ± 1 la funzione f è derivabile e

   $$f'(x) = \frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

   La derivata f' si annulla solo in $x_0 = 0$, che è un punto di massimo locale. Non ci sono altri punti di minimo o di massimo locale.

   (b) Non ci sono asintoti (perché $f(x) \sim x^{4/3}$ per $x \to +\infty$). Il grafico di f è



   (c) Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin, si ha

   $$f(x) = (x^2-1)^{2/3} = (1-x^2)^{2/3} = 1+\binom{2/3}{1}(-x^2)+\binom{2/3}{2}\frac{(-x^2)^2}{2}+\cdots = 1-\frac{2}{3}\,x^2+o(x^3)\,.$$

3. (a) Utilizzando la formula risolutiva per le equazioni differenziali del primo ordine, si ha

   $$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}}\left[\int -\frac{\mathrm{e}^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + c\right] = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left[2\int -\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + c\right] \\ &= \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} + c\right) = 2 + c\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \qquad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

   Imponendo la condizione iniziale $y(1) = a$, si ha $a = 2 + c\,\mathrm{e}$, da cui $c = (a-2)\mathrm{e}^{-1}$. Pertanto, la soluzione cercata è

   $$y_a(x) = 2 + (a-2)\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}-1}\,.$$

   (b) Poiché le funzioni al numeratore e al denominatore sono derivabili, e il loro rapporto per $x \to 1$ conduce a una forma di indeterminazione di tipo $\frac{0}{0}$, possiamo applicare la regola di De l'Hospital. Utilizzando l'equazione differenziale, si ha

   $$L_a = \lim_{x\to 1}\frac{y_a(x)-a}{x-1} = \lim_{x\to 1} y_a'(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{y_a(x)}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{a}{2} - 1\,.$$

4. (a) I parametri direttori di r_1 sono $(1 : -1 : -2)$. I parametri direttori di r_2 sono

$$\left(\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (6 : 3 : -9) = (2 : 1 : -3) .$$

Avendo parametri direttori non proporzionali, le due rette r_1 ed r_2 non sono parallele. Intersecando r_1 ed r_2 si ha il sistema

$$\begin{cases} 1 + t + 4(2 - t) + 2(1 - 2t) - 1 = 0 \\ 2(1 + t) - 2 + t + 1 - 2t + 4 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 7t - 10 = 0 \\ t + 5 = 0 . \end{cases}$$

Poiché tale sistema è evidentemente incompatibile, le due rette r_1 ed r_2 non sono incidenti. Di conseguenza, non essendo parallele né incidenti, le due rette r_1 ed r_2 sono sghembe.

(b) Se i due fasci Φ_1 e Φ_2 possedessero un piano in comune, allora tale piano conterrebbe i sostegni di entrambi i fasci e quindi le rette r_1 ed r_2 dovrebbero essere complanari. Tuttavia, come è stato mostrato nel punto precedente, le due rette r_1 ed r_2 sono sghembe e quindi non possono essere complanari. Di conseguenza, $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$.

(c) Consideriamo, ad esempio, il punto $P \equiv (0, 0, -1)$ che appartiene al piano π, ma non alla retta r. Sia π' il piano appartenente al fascio Φ_2 passante per P. Poiché l'equazione di Φ_2 è

$$\lambda(x + 4y + 2z - 1) + \mu(2x - y + z + 4) = 0 ,$$

imponendo il passaggio per P, si ottiene $-3\lambda + 3\mu = 0$, ossia $\lambda = \mu$. Pertanto, $\pi' : 3x + 3y + 3z + 3 = 0$, ossia $\pi' : x + y + z + 1 = 0$. Di conseguenza, $\pi' = \pi$ e quindi $\pi \in \Phi_2$.