Es. 1	Es. 2	Es. 3		Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere** **02 Febbraio 2015 Compito A**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 12=2+6+2+2 punti; Es.2: 12=5+5+2 punti; Es.3: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Data la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\gamma : I \to \Gamma \qquad \gamma(t) := (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) \qquad t \in I := [-1, +1]\,,$$

i) determinare la retta tangente L a Γ nel punto $p = (1, 0, 1) \in \Gamma$;

ii) determinare il raggio ed il centro del cerchio osculatore nel punto $p \in \Gamma$;

iii) determinare la lunghezza $l(\Gamma)$ di Γ

iv) determinare il momento di inerzia $I(\Gamma, Z, \rho)$ di Γ rispetto all'asse Z con densita' di massa

$$d_\Gamma : \Gamma \to [0, +\infty) \qquad d_\Gamma(x, y, z) := \frac{1}{|z|} \qquad (x, y, z) \in \Gamma\,.$$

SOLUZIONE

i) $p = \gamma(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \gamma(0)$.

$\dot\gamma(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\cos t + \sin t), e^t) \qquad \dot\gamma(0) = (1, 1, 1)$

$$L = \{\gamma(0) + s\dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\} = \{(1 + s, s, 1 + s) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\}\,.$$

ii) $\ddot\gamma(t) = e^t(-2\sin t, +2\cos t, 1) \qquad \ddot\gamma(0) = (0, 2, 1)$

$\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0) = (-1, -1, 2)$, $\|\dot\gamma(0)\| = \sqrt{3}$

$$k(0) = \frac{\|\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0)\|}{\|\dot\gamma(0)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \rho(0) = \frac{1}{k(0)} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,,$$

$$B(0) = \frac{\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0)}{\|\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)\,, \qquad T(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \qquad N(0) = B(0) \wedge T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0)\,.$$

Raggio cerchio osculatore $\rho(0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Centro cerchio osculatore $C(0) = \gamma(0) + \rho(0)N(0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$.

iii)

$$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1} = \sqrt{3}e^t \qquad l(\Gamma) = \int_I 1 ds = \sqrt{3}\int_{-1}^{+1} e^t\, dt = \sqrt{3}(e - e^{-1})\,.$$

iv) Distanza dall'asse Z: $\quad \delta_Z(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \delta_Z(\gamma(t)) = e^t$

Densita di massa: $d_\Gamma(\gamma(t)) = e^{-t}$. Momento d'inerzia

$$I(\Gamma, Z, d_\Gamma) = \int_\Gamma \delta_Z^2\, d_\Gamma\, ds = \sqrt{3}\int_{-1}^{+1} e^{2t} e^{-t} e^t\, dt = \frac{\sqrt{3}}{2}(e^2 - e^{-2})\,.$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' + ty = t\,,$$

dove $y = y(t)$.

i) Determinare le soluzioni dell'equazione.

ii) Determinare la soluzione $\overline{y}$ che assume valore massimo uguale a 2.

iii) Definita la funzione

$$F(x) = \int_0^x \overline{y}(t)\,dt\,,$$

verificare che il grafico di F ammette un asintoto obliquo a $+\infty$.

SOLUZIONE

i) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine, scritta nella forma $y' + a(t)y = f(t)$, con $a(t) = t$ e $f(t) = t$. Le soluzioni sono tutte e sole quelle del tipo

$$y(t) = e^{-A(t)}(c + B(t))\,,$$

dove $A(t)$ è una primitiva fissata di $a(t)$, $B(t)$ è una primitiva fissata di $e^{A(t)}f(t)$ e c è una costante arbitraria.

In questo caso abbiamo $a(t) = t$, per cui una primitiva di $a(t)$ è $A(t) = \dfrac{t^2}{2}$. Poiché $f(t) = t$, risulta allora $e^{A(t)}f(t) = te^{t^2/2}$ e una primitiva di $te^{t^2/2}$ è $B(t) = e^{t^2/2}$. Le soluzioni dell'equazione sono quindi tutte e sole le funzioni del tipo

$$y = e^{-\frac{1}{2}t^2}\left(c + e^{\frac{1}{2}t^2}\right) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} + 1\,.$$

ii) Anche senza studiare il segno della derivata, basta notare che $e^{-\frac{1}{2}t^2}$ prende, al variare di t, tutti e soli i valori dell'intervallo $(0, 1]$, per cui la soluzione che prende valore massimo uguale a 2 è quella con $c = 1$. Di conseguenza, risulta

$$\overline{y}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} + 1\,.$$

iii) Il grafico di F ha un asintoto obliquo a $+\infty$ esiste se e solo se:

1) esiste finito (e non nullo, se vogliamo un vero asintoto obliquo) il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$;

2) indicato con m il limite del punto 1), esiste finito il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(F(x) - mx)$.

Osserviamo innanzitutto che la funzione integranda tende a 1 per $t \to +\infty$, per cui risulta $F(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Nel calcolo del limite di $F(x)/x$ per $x \to +\infty$ si presenta quindi la forma di indecisione $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Poiché le funzioni al numeratore e al denominatore sono derivabili, è possibile applicare il teorema di De l'Hôpital, ottenendo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}x^2} + 1\right) = 1\,.$$

Abbiamo quindi $m = 1$, per cui risulta

$$F(x) - mx = F(x) - x = \int_0^x \left(e^{-\frac{1}{2}t^2} + 1\right)\,dt - x = \int_0^x \left(e^{-\frac{1}{2}t^2} + 1\right)\,dt - \int_0^x 1\,dt = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt\,.$$

Poiché $e^{-\frac{1}{2}t^2}$ è integrabile in $(0, +\infty)$, il limite di $F(x) - x$ per $x \to +\infty$ esiste finito. Segue che il grafico di F ha un asintoto obliquo a $+\infty$.

3. Nello spazio riferito a un sistema cartesiano $Oxyz$, sia r la retta rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} x = \ \ 2 - 3t \\ y = \ \ 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

e sia s la retta che si ottiene intersecando i due piani rappresentati dalle equazioni $x - z = 1$ e $x + y - 2z - 3 = 0$.

i) Rappresentare parametricamente la retta s.

ii) Determinare l'intersezione delle rette r ed s.

iii) Scrivere un'equazione cartesiana del piano che contiene r e s.

SOLUZIONE

i) Basta porre $z = t$ e risolvere rispetto a x e y per ottenere la seguente rappresentazione parametrica della retta s:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases} .$$

ii) Occorre verificare che r e s hanno uno e un solo punto in comune. La ricerca di punti comuni alle rette r e s equivale alla ricerca delle coppie di valori h e k del parametro t che sostituiti nelle rappresentazioni di r e s danno uno stesso punto, cioè alla ricerca delle coppie h e k tali che $2 - 3h = 1 + k$, $1 + h = 2 + k$, $-1 + h = k$. Si ottiene facilmente l'unica soluzione $h = \frac{1}{2}$, $k = -\frac{1}{2}$, valori corrispondenti all'unico punto comune $P_0 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

iii) Sia π il piano che contiene le rette r e s. Un modo per trovare una equazione di π è quello di determinare un vettore $\mathbf{n}$ ortogonale a π — calcolando il prodotto vettoriale di due vettori direzionali di r e s — e di scrivere poi l'equazione del piano ortogonale a $\mathbf{n}$ che passa per il punto comune P_0 trovato in precedenza. Un vettore direzionale di r è il vettore $\mathbf{v} = (-3, 1, 1)$, mentre un vettore direzionale di s è il vettore $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$. Poniamo allora $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = (0, 4, -4)$ (come si calcola facilmente). Una equazione di π è quindi

$$4\left(y - \frac{3}{2}\right) - 4\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0\,,$$

equivalente a

$$y - z - 2 = 0\,.$$

4. Domanda di teoria.

Es. 1	Es. 2	Es. 3		Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere** **02 Febbraio 2015 Compito B**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 12=2+6+2+2 punti; Es.2: 12=5+5+2 punti; Es.3: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Data la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\gamma : I \to \Gamma \qquad \gamma(t) := (e^t \cos t, e^t, e^t \sin t) \qquad t \in I := [-2, +2]\,,$$

i) determinare la retta tangente L a Γ nel punto $p = (1, 1, 0) \in \Gamma$;

ii) determinare il raggio ed il centro del cerchio osculatore nel punto $p \in \Gamma$;

iii) determinare la lunghezza $l(\Gamma)$ di Γ

iv) determinare il momento di inerzia $I(\Gamma, Y, \rho)$ di Γ rispetto all'asse Y con densita' di massa

$$d_\Gamma : \Gamma \to [0, +\infty) \qquad d_\Gamma(x, y, z) := \frac{1}{|y|} \qquad (x, y, z) \in \Gamma\,.$$

SOLUZIONE

i) $p = \gamma(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \gamma(0)$.

$\dot\gamma(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t, e^t(\cos t + \sin t)) \qquad \dot\gamma(0) = (1, 1, 1)$

$$L = \{\gamma(0) + s\dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\} = \{(1 + s, 1 + s, s) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\}\,.$$

ii) $\ddot\gamma(t) = e^t(-2\sin t, 1, +2\cos t) \qquad \ddot\gamma(0) = (0, 1, 2)$

$\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0) = (1, -2, 1)$, $\|\dot\gamma(0)\| = \sqrt{3}$

$$k(0) = \frac{\|\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0)\|}{\|\dot\gamma(0)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \rho(0) = \frac{1}{k(0)} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,,$$

$$B(0) = \frac{\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0)}{\|\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)\,, \qquad T(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \qquad N(0) = B(0) \wedge T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)\,.$$

Raggio cerchio osculatore $\rho(0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Centro cerchio osculatore $C(0) = \gamma(0) + \rho(0)N(0) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$.

iii)

$$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1} = \sqrt{3}e^t \qquad l(\Gamma) = \int_I 1 ds = \sqrt{3}\int_{-2}^{+2} e^t\, dt = \sqrt{3}(e^2 - e^{-2})\,.$$

iv) Distanza dall'asse Y: $\quad \delta_Y(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}\,, \qquad \delta_Y(\gamma(t)) = e^t$

Densita di massa: $d_\Gamma(\gamma(t)) = e^{-t}$. Momento d'inerzia

$$I(\Gamma, Y, d_\Gamma) = \int_\Gamma \delta_Y^2\, d_\Gamma\, ds = \sqrt{3}\int_{-2}^{+2} e^{2t}e^{-t}e^t\, dt = \frac{\sqrt{3}}{2}(e^4 - e^{-4})\,.$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' + ty + t = 0\,,$$

dove $y = y(t)$.

i) Determinare le soluzioni dell'equazione.

ii) Determinare la soluzione $\overline{y}$ che assume valore massimo uguale a 0.

iii) Definita la funzione

$$F(x) = \int_0^x \overline{y}(t)\,dt\,,$$

verificare che il grafico di F ammette un asintoto obliquo a $+\infty$.

RISPOSTE

i) Equazione lineare del tipo $y' + a(t)y = f(t)$ con $a(t) = t$ e $f(t) = -t$. Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$y = c \cdot e^{-t^2/2} - 1\,.$$

ii) $y = e^{-t^2/2} - 1$ (corrispondente a $c = 1$).

iii) Procedendo come per la versione A, si trova $m = -1$ e $F(x) - mx = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$, che ha limite finito per $x \to +\infty$.

3. Nello spazio riferito a un sistema cartesiano $Oxyz$, sia r la retta rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

e sia s la retta che si ottiene intersecando i due piani rappresentati dalle equazioni $x - z = -1$ e $-2x + y + z - 3 = 0$.

i) Rappresentare parametricamente la retta s.

ii) Determinare l'intersezione delle rette r ed s.

iii) Scrivere un'equazione cartesiana del piano che contiene r e s.

RISPOSTE

i) Una rappresentazione parametrica della retta s è

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

(sono possibili altre rappresentazioni).

ii) Le rette sono incidenti nel punto $P_0 \equiv \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

iii) Il piano che contiene le due rette ha equazione $x - y + 2 = 0$ (o equivalente).

4. Domanda di teoria.

Es. 1	Es. 2	Es. 3		Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 Seconda prova in itinere 02 Febbraio 2015 Compito C	Docente:	Politecnico di Milano Ingegneria Industriale
Cognome:	Nome:	Matricola:

Punteggi degli esercizi: Es.1: 12=2+6+2+2 punti; Es.2: 12=5+5+2 punti; Es.3: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Data la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\gamma : I \to \Gamma \qquad \gamma(t) := (e^t, e^t \cos t, e^t \sin t) \qquad t \in I := [-3, +3]\,,$$

i) determinare la retta tangente L a Γ nel punto $p = (1,1,0) \in \Gamma$;

ii) determinare il raggio ed il centro del cerchio osculatore nel punto $p \in \Gamma$;

iii) determinare la lunghezza $l(\Gamma)$ di Γ

iv) determinare il momento di inerzia $I(\Gamma, X, \rho)$ di Γ rispetto all'asse X con densita' di massa

$$d_\Gamma : \Gamma \to [0, +\infty) \qquad d_\Gamma(x,y,z) := \frac{1}{|x|} \qquad (x,y,z) \in \Gamma\,.$$

SOLUZIONE

i) $p = \gamma(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \gamma(0)$.

$\dot\gamma(t) = (e^t, e^t(\cos t - \sin t), e^t(\cos t + \sin t)) \qquad \dot\gamma(0) = (1,1,1)$

$$L = \{\gamma(0) + s\dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\} = \{(1+s, 1+s, s) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\}\,.$$

ii) $\ddot\gamma(t) = e^t(1, -2\sin t, +2\cos t) \qquad \ddot\gamma(0) = (1,0,2)$

$\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0) = (2,-1,-1)$, $\|\dot\gamma(0)\| = \sqrt{3}$

$$k(0) = \frac{\|\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0)\|}{\|\dot\gamma(0)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \rho(0) = \frac{1}{k(0)} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,,$$

$$B(0) = \frac{\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0)}{\|\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)\,, \qquad T(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \qquad N(0) = B(0) \wedge T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\,.$$

Raggio cerchio osculatore $\rho(0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Centro cerchio osculatore $C(0) = \gamma(0) + \rho(0)N(0) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

iii)

$$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1} = \sqrt{3}e^t \qquad l(\Gamma) = \int_I 1 ds = \sqrt{3}\int_{-3}^{+3} e^t\, dt = \sqrt{3}(e^3 - e^{-3})\,.$$

iv) Distanza dall'asse X: $\qquad \delta_X(x,y,z) = \sqrt{y^2 + z^2}\,, \qquad \delta_X(\gamma(t)) = e^t$

Densita di massa: $d_\Gamma(\gamma(t)) = e^{-t}$. Momento d'inerzia

$$I(\Gamma, X, d_\Gamma) = \int_\Gamma \delta_X^2\, d_\Gamma\, ds = \sqrt{3}\int_{-3}^{+3} e^{2t} e^{-t} e^t\, dt = \frac{\sqrt{3}}{2}(e^6 - e^{-6})\,.$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' + 2ty = t\,,$$

dove $y = y(t)$.

i) Determinare le soluzioni dell'equazione.

ii) Determinare la soluzione $\overline{y}$ che assume valore massimo uguale a 1.

iii) Definita la funzione

$$F(x) = \int_0^x \overline{y}(t)\,dt\,,$$

verificare che il grafico di F ammette un asintoto obliquo a $+\infty$.

RISPOSTE

i) Equazione lineare del tipo $y' + a(t)y = f(t)$ con $a(t) = 2t$ e $f(t) = t$. Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$y = c \cdot e^{-t^2/2} + \frac{1}{2}\,.$$

ii) $y = \frac{1}{2}e^{-t^2/2} + \frac{1}{2}$ (corrispondente a $c = 1/2$).

iii) Procedendo come per la versione A, si trova $m = 1/2$ e $F(x) - mx = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$, che ha limite finito per $x \to +\infty$.

3. Nello spazio riferito a un sistema cartesiano $Oxyz$, sia r la retta rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} x = \ \ 1 + t \\ y = \ \ 2 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

e sia s la retta che si ottiene intersecando i due piani rappresentati dalle equazioni $y - z = 1$ e $x - 2z + y - 3 = 0$.

i) Rappresentare parametricamente la retta s.

ii) Determinare l'intersezione delle rette r ed s.

iii) Scrivere un'equazione cartesiana del piano che contiene r e s.

RISPOSTE

i) Una rappresentazione parametrica della retta s è

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

(sono possibili altre rappresentazioni).

ii) Le rette sono incidenti nel punto $P_0 \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

iii) Il piano che contiene le due rette ha equazione $x - z - 2 = 0$ (o equivalente).

4. Domanda di teoria.

Es. 1	Es. 2	Es. 3		Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere** **02 Febbraio 2015 Compito D**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 12=2+6+2+2 punti; Es.2: 12=5+5+2 punti; Es.3: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate***. *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Data la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\gamma : I \to \Gamma \qquad \gamma(t) := (e^t, e^t \sin t, e^t \cos t) \qquad t \in I := [-4, +4]\,,$$

i) determinare la retta tangente L a Γ nel punto $p = (1, 0, 1) \in \Gamma$;

ii) determinare il raggio ed il centro del cerchio osculatore nel punto $p \in \Gamma$;

iii) determinare la lunghezza $l(\Gamma)$ di Γ

iv) determinare il momento di inerzia $I(\Gamma, X, \rho)$ di Γ rispetto all'asse X con densita' di massa

$$d_\Gamma : \Gamma \to [0, +\infty) \qquad d_\Gamma(x, y, z) := |x| \qquad (x, y, z) \in \Gamma\,.$$

SOLUZIONE

i) $p = \gamma(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \gamma(0)$.
$\dot\gamma(t) = (e^t, e^t(\cos t + \sin t), e^t(\cos t - \sin t)) \qquad \dot\gamma(0) = (1, 1, 1)$

$$L = \{\gamma(0) + s\dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\} = \{(1 + s, s, 1 + s) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\}\,.$$

ii) $\ddot\gamma(t) = e^t(1, +2\cos t, -2\sin t) \qquad \ddot\gamma(0) = (1, 2, 0)$
$\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0) = (-2, 1, 1)$, $\|\dot\gamma(0)\| = \sqrt{3}$

$$k(0) = \frac{\|\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0)\|}{\|\dot\gamma(0)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \rho(0) = \frac{1}{k(0)} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,,$$

$$B(0) = \frac{\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0)}{\|\dot\gamma(0) \wedge \ddot\gamma(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)\,, \qquad T(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \qquad N(0) = B(0) \wedge T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)\,.$$

Raggio cerchio osculatore $\rho(0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$
Centro cerchio osculatore $C(0) = \gamma(0) + \rho(0)N(0) = (1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

iii)

$$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1} = \sqrt{3}e^t \qquad l(\Gamma) = \int_I 1 ds = \sqrt{3} \int_{-4}^{+4} e^t\, dt = \sqrt{3}(e^4 - e^{-4})\,.$$

iv) Distanza dall'asse X: $\quad \delta_X(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}\,, \qquad \delta_X(\gamma(t)) = e^t$
Densita di massa: $d_\Gamma(\gamma(t)) = e^t$. Momento d'inerzia

$$I(\Gamma, X, d_\Gamma) = \int_\Gamma \delta_X^2\, d_\Gamma\, ds = \sqrt{3} \int_{-4}^{+4} e^{2t} e^t e^t\, dt = \frac{\sqrt{3}}{4}(e^{16} - e^{-16})\,.$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' + 2ty + t = 0\,,$$

dove $y = y(t)$.

i) Determinare le soluzioni dell'equazione.

ii) Determinare la soluzione $\overline{y}$ che assume valore massimo uguale a 0.

iii) Definita la funzione

$$F(x) = \int_0^x \overline{y}(t)\,dt\,,$$

verificare che il grafico di F ammette un asintoto obliquo a $+\infty$.

RISPOSTE

i) Equazione lineare del tipo $y' + a(t)y = f(t)$ con $a(t) = 2t$ e $f(t) = -t$. Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$y = c \cdot e^{-t^2/2} - \frac{1}{2}\,.$$

ii) $y = \frac{1}{2}e^{-t^2/2} - \frac{1}{2}$ (corrispondente a $c = 1/2$).

iii) Procedendo come per la versione A, si trova $m = -1/2$ e $F(x) - mx = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$, che ha limite finito per $x \to +\infty$.

3. Nello spazio riferito a un sistema cartesiano $Oxyz$, sia r la retta rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

e sia s la retta che si ottiene intersecando i due piani rappresentati dalle equazioni $x - y = 1$ e $x - 2y + z - 3 = 0$.

i) Rappresentare parametricamente la retta s.

ii) Determinare l'intersezione delle rette r ed s.

iii) Scrivere un'equazione cartesiana del piano che contiene r e s.

RISPOSTE

i) Una rappresentazione parametrica della retta s è

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

(sono possibili altre rappresentazioni).

ii) Le rette sono incidenti nel punto $P_0 \equiv \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

iii) Il piano che contiene le due rette ha equazione $y - z + 2 = 0$ (o equivalente).

4. Domanda di teoria.