Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e Geometria 1 **Prima Prova** **24 Novembre 2014 Compito A**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Scuola di Ingegneria** **Industriale e dell'Informazione**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 10=4+4+2; Es.2: 8=2+2+4; Es.3: 12=2+4+4+2

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1+iz}{iz+i}$$

(a) Scrivere in forma algebrica le controimmagini di $w = 3 + i$ (ossia i numeri $z \in \mathbb{C}$ per i quali $f(z) = w$).

$$\boxed{-\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i}$$

(b) Scrivere i punti fissi di f (cioè i punti $z \in \mathbb{C}$ per i quali $f(z) = z$) in forma algebrica.

$$\boxed{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}$$

(c) Scrivere i punti fissi di f in forma trigonometrica.

$$\boxed{\pm\Big(\cos\big(\frac{3}{4}\pi\big) + i\sin\big(\frac{3}{4}\pi\big)\Big)}$$

Soluzione: (a) Le controimmagini di $3 + i$ sono gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = 3 + i$, cioé

$$\frac{1+iz}{iz+i} = 3+i \Longleftrightarrow 1+iz = 3iz+3i-z-1 \Longleftrightarrow z = \frac{-2+3i}{1-2i} \Longleftrightarrow z = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i\,.$$

(b) e (c)

$$f(z) = z \Longleftrightarrow \frac{1+iz}{iz+i} = z \Longleftrightarrow 1+iz = iz^2+iz \Longleftrightarrow 1 = iz^2 \Longleftrightarrow z^2 = -i \Longleftrightarrow z = \sqrt{-i}\,.$$

In forma trigonometrica e algebrica, le radici quadrate di $-i = \cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi)$ sono

$$z_{1,2} = \pm\Big(\cos\big(\frac{3}{4}\pi\big) + i\sin\big(\frac{3}{4}\pi\big)\Big) = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,.$$

2. Siano f e g le funzioni definite su $(1,+\infty)$ nel modo seguente:

$$f(x)=\frac{(x+\sqrt[3]{x})\,\mathrm{e}^{2x}}{x(\mathrm{e}^{x}-1)\ln x}\qquad\qquad g(x)=\frac{x(x+\ln x)\,\mathrm{e}^{3x}}{x^{2}+\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{2x}}$$

(a) Calcolare: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. $\boxed{+\infty}$

(b) Calcolare: $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. $\boxed{+\infty}$

(c) Stabilire se $g(x)$ è $o(f(x))$, per $x\to+\infty$. $\boxed{g(x) \text{ non è } o(f(x)), \text{ per } x\to+\infty.}$

Soluzione.

(a) Per $x\to+\infty$, valgono le seguenti equivalenze asintotiche:

$$f(x)=\frac{(x+\sqrt[3]{x})\,\mathrm{e}^{2x}}{x(\mathrm{e}^{x}-1)\ln x}\sim\frac{x\,\mathrm{e}^{2x}}{x\mathrm{e}^{x}\ln x}\sim\frac{\mathrm{e}^{x}}{\ln x}\qquad \text{per } x\to+\infty$$

Poiché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{\ln x}=+\infty$, si ha $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

(b) Per $x\to+\infty$, valgono le seguenti equivalenze asintotiche:

$$g(x)=\frac{x(x+\ln x)\,\mathrm{e}^{3x}}{x^{2}+\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{2x}}\sim\frac{x\,x\,\mathrm{e}^{3x}}{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{2x}}\sim x\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{x}\qquad \text{per } x\to+\infty$$

Poiché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{x}=+\infty$, si ha $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

(c) Poiché, per $x\to+\infty$, $f(x)\sim\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\ln x}$ e $g(x)\sim x\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{x}$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{x}\,\frac{\ln x}{\mathrm{e}^{x}}=\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\ln x=+\infty \tag{1}$$

Siccome $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}\neq 0$, $g(x)$ non è $o(f(x))$, per $x\to+\infty$.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \ln[(x-1)^2] & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

(a) Stabilire se f è derivabile in $x_0 = 1$. $\boxed{f \text{ è derivabile in } x_0 = 1 \text{ e } f'(1) = 0}$

(b) Trovare i punti di massimo locale di f. $\boxed{x_0 = 1}$

(c) Trovare i punti di minimo locale di f. $\boxed{x_1 = 1 + e^{-1/2}, \qquad x_2 = 1 - e^{-1/2}}$

(d) Disegnare il grafico di f.

Soluzione. Per ogni x in $\mathbb{R}$, $f(x) = g(x-1)$, dove $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita nel modo seguente:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Il grafico di f si ottiene da quello di g mediante una traslazione. Conviene allora studiare g e dedurne informazioni su f. Ad esempio: la funzione g è pari, e quindi il grafico di f sarà simmetrico rispetto alla retta $x = 1$.

La derivabilità di f in $x_0 = 1$ equivale alla derivabilità di g in 0. Calcoliamo allora il limite del rapporto incrementale di g relativo al punto 0, per $x \to 0$:

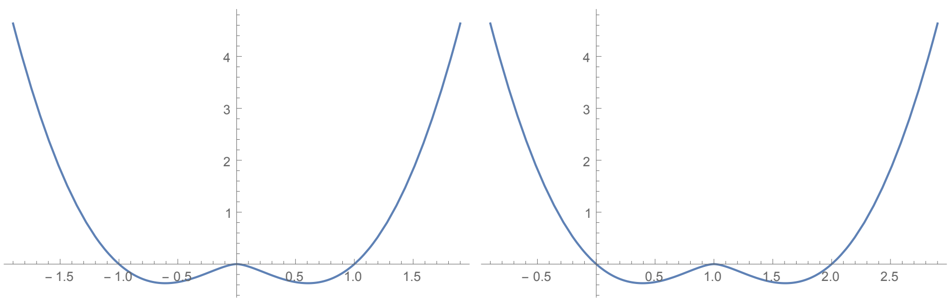
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} x \ln x^2 = \lim_{x\to 0} 2x \ln|x| = 0$$

Concludiamo che g è derivabile in 0 e $g'(0) = 0$. Quindi f è derivabile in $x_0 = 1$ e $f'(1) = 0$.

Poiché g è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, i punti di massimo locale e di minimo locale di g vanno ricercati fra i punti in cui la derivata prima g' si annulla. Sappiamo già che $g'(0) = 0$; studiando direttamente il segno di g vicino a 0, si vede che $t_0 = 0$ è un punto di massimo locale per g.

In $(0, +\infty)$ la derivata $g'(x) = 2x(1 + 2\ln x)$ si annulla solo in $t_1 = e^{-1/2}$, che è un punto di minimo locale per g. Per simmetria, anche $t_2 = -e^{-1/2}$ è un punto di minimo locale per g.

Ne segue che $x_0 = t_0 + 1 = 1$ è l'unico punto di massimo locale di f, mentre $x_1 = t_1 + 1 = e^{-1/2} + 1$ e $x_2 = t_2 + 1 = -e^{-1/2} + 1$ sono i punti di minimo locale di f.



(a) $g(x) = x^2 \ln(x^2)$.

(b) $f(x) = g(x-1) = (x-1)^2 \ln[(x-1)^2]$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e Geometria 1 **Prima Prova** **24 Novembre 2014 Compito B**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Scuola di Ingegneria** **Industriale e dell'Informazione**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 10=4+4+2; Es.2: 8=2+2+4; Es.3: 12=2+4+4+2

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1 - iz}{iz - i}$$

(a) Scrivere in forma algebrica le controimmagini di $w = 2 + i$ (ossia i numeri $z \in \mathbb{C}$ per i quali $f(z) = w$).

$$\boxed{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i}$$

(b) Scrivere i punti fissi di f (cioè i punti $z \in \mathbb{C}$ per i quali $f(z) = z$) in forma algebrica.

$$\boxed{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)}$$

(c) Scrivere i punti fissi di f in forma trigonometrica.

$$\boxed{\pm\Big(\cos\big(\frac{3}{4}\pi\big) + i\sin\big(\frac{3}{4}\pi\big)\Big)}$$

Soluzione: (a) Le controimmagini di $2 + i$ sono gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = 2 + i$, cioé

$$\frac{1 - iz}{iz - i} = 2 + i \Longleftrightarrow 1 - iz = 2iz - 2i - z + 1 \Longleftrightarrow z = \frac{2i}{-1 + 3i} \Longleftrightarrow z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i\,.$$

(b) e (c)

$$f(z) = z \Longleftrightarrow \frac{1 - iz}{iz - i} = z \Longleftrightarrow 1 - iz = iz^2 - iz \Longleftrightarrow 1 = iz^2 \Longleftrightarrow z^2 = -i \Longleftrightarrow z = \sqrt{-i}\,.$$

In forma trigonometrica e algebrica, le radici quadrate di $-i = \cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi)$ sono

$$z_{1,2} = \pm\Big(\cos\big(\frac{3}{4}\pi\big) + i\sin\big(\frac{3}{4}\pi\big)\Big) = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\,.$$

2. Siano f e g le funzioni definite su $(1,+\infty)$ nel modo seguente:

$$f(x)=\frac{(x+\sqrt[4]{x})\,\mathrm{e}^{3x}}{x(\mathrm{e}^x-2)\ln x} \qquad\qquad g(x)=\frac{x(x+2\ln x)\,\mathrm{e}^{4x}}{x^2+\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{3x}}$$

(a) Calcolare: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. $\boxed{+\infty}$

(b) Calcolare: $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. $\boxed{+\infty}$

(c) Stabilire se $f(x)$ è $o(g(x))$, per $x\to+\infty$. $\boxed{f(x) \text{ non è } o(g(x)), \text{ per } x\to+\infty.}$

Soluzione.

(a) Per $x\to+\infty$, valgono le seguenti equivalenze asintotiche:

$$f(x)=\frac{(x+\sqrt[4]{x})\,\mathrm{e}^{3x}}{x(\mathrm{e}^x-2)\ln x}\sim\frac{x\,\mathrm{e}^{3x}}{x\mathrm{e}^x\ln x}\sim\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\ln x} \qquad \text{per } x\to+\infty$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\ln x}=+\infty$, si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

(b) Per $x\to+\infty$, valgono le seguenti equivalenze asintotiche:

$$g(x)=\frac{x(x+2\ln x)\,\mathrm{e}^{4x}}{x^2+\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{3x}}\sim\frac{x\,x\,\mathrm{e}^{4x}}{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{3x}}\sim x\sqrt{x}\,\mathrm{e}^x \qquad \text{per } x\to+\infty$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\,\mathrm{e}^x=+\infty$, si ha $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

(c) Poiché, per $x\to+\infty$, $f(x)\sim\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\ln x}$ e $g(x)\sim x\sqrt{x}\,\mathrm{e}^x$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\ln x}\,\frac{1}{x\sqrt{x}\,\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x}\,\frac{1}{x\sqrt{x}}=+\infty \tag{2}$$

Siccome $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\neq 0$, $f(x)$ non è $o(g(x))$, per $x\to+\infty$.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 \ln[(x-1)^2] & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

(a) Stabilire se f è derivabile in $x_0 = 1$. $\boxed{f \text{ è derivabile in } x_0 = 1 \text{ e } f'(1) = 0}$

(b) Trovare i punti di massimo locale di f. $\boxed{x_1 = 1 + e^{-1/2}, \qquad x_2 = 1 - e^{-1/2}}$

(c) Trovare i punti di minimo locale di f. $\boxed{x_0 = 1}$

(d) Disegnare il grafico di f.

Soluzione. Per ogni x in $\mathbb{R}$, $f(x) = g(x-1)$, dove $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita nel modo seguente:

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 \ln(x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Il grafico di f si ottiene da quello di g mediante una traslazione. Conviene allora studiare g e dedurne informazioni su f. Ad esempio: la funzione g è pari, e quindi il grafico di f sarà simmetrico rispetto alla retta $x = 1$.

La derivabilità di f in $x_0 = 1$ equivale alla derivabilità di g in 0. Calcoliamo allora il limite del rapporto incrementale di g relativo al punto 0, per $x \to 0$:

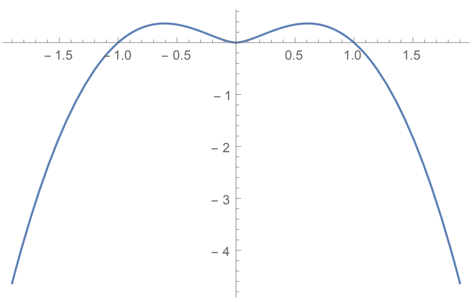
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 \ln(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} -x \ln x^2 = \lim_{x\to 0} -2x \ln |x| = 0$$

Concludiamo che g è derivabile in 0 e $g'(0) = 0$. Quindi f è derivabile in $x_0 = 1$ e $f'(1) = 0$.

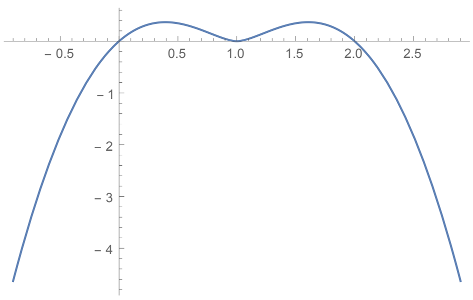
Poiché g è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, i punti di massimo locale e di minimo locale di g vanno ricercati fra i punti in cui la derivata prima g' si annulla. Sappiamo già che $g'(0) = 0$; studiando direttamente il segno di g vicino a 0, si vede che $t_0 = 0$ è un punto di minimo locale per g.

In $(0, +\infty)$ la derivata $g'(x) = -2x(1 + 2\ln x)$ si annulla solo in $t_1 = e^{-1/2}$, che è un punto di massimo locale per g. Per simmetria, anche $t_2 = -e^{-1/2}$ è un punto di massimo locale per g.

Ne segue che $x_0 = t_0 + 1 = 1$ è l'unico punto di minimo locale di f, mentre $x_1 = t_1 + 1 = e^{-1/2} + 1$ e $x_2 = t_2 + 1 = -e^{-1/2} + 1$ sono i punti di massimo locale di f.



(a) $g(x) = -x^2 \ln(x^2)$.



(b) $f(x) = g(x-1) = -(x-1)^2 \ln[(x-1)^2]$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e Geometria 1 **Prima Prova** **24 Novembre 2014 Compito C**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Scuola di Ingegneria** **Industriale e dell'Informazione**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 10=4+4+2; Es.2: 8=2+2+4; Es.3: 12=2+4+4+2

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1 + iz}{-iz + i}$$

(a) Scrivere in forma algebrica le controimmagini di $w = 2 + i$ (ossia i numeri $z \in \mathbb{C}$ per i quali $f(z) = w$).

$$\boxed{\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i}$$

(b) Scrivere i punti fissi di f (cioè i punti $z \in \mathbb{C}$ per i quali $f(z) = z$) in forma algebrica.

$$\boxed{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)}$$

(c) Scrivere i punti fissi di f in forma trigonometrica.

$$\boxed{\pm\Big(\cos\big(\frac{1}{4}\pi\big) + i \sin\big(\frac{1}{4}\pi\big)\Big)}$$

Soluzione: (a) Le controimmagini di $2 + i$ sono gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = 2 + i$, cioé

$$\frac{1 + iz}{-iz + i} = 2 + i \iff 1 + iz = -2iz + 2i + z - 1 \iff z = \frac{2 - 2i}{1 - 3i} \iff z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i\,.$$

(b) e (c)

$$f(z) = z \iff \frac{1 + iz}{-iz + i} = z \iff 1 + iz = -iz^2 + iz \iff -1 = iz^2 \iff z^2 = i \iff z = \sqrt{i}\,.$$

In forma trigonometrica e algebrica, le radici quadrate di $i = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i \sin(\frac{1}{2}\pi)$ sono

$$z_{1,2} = \pm\Big(\cos\big(\frac{1}{4}\pi\big) + i \sin\big(\frac{1}{4}\pi\big)\Big) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\,.$$

2. Siano f e g le funzioni definite su $(1, +\infty)$ nel modo seguente:

$$f(x) = \frac{(x + \sqrt[5]{x})\, e^{4x}}{x(e^x - 3)\ln x} \qquad\qquad g(x) = \frac{x(x - 5\ln x)\, e^{5x}}{x^3 + \sqrt{x}\, e^x}$$

(a) Calcolare: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. $\boxed{+\infty}$

(b) Calcolare: $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. $\boxed{+\infty}$

(c) Stabilire se $f(x)$ è $o(g(x))$, per $x \to +\infty$. $\boxed{f(x) \text{ è } o(g(x)), \text{ per } x \to +\infty.}$

Soluzione.

(a) Per $x \to +\infty$, valgono le seguenti equivalenze asintotiche:

$$f(x) = \frac{(x + \sqrt[5]{x})\, e^{4x}}{x(e^x - 3)\ln x} \sim \frac{x\, e^{4x}}{x e^x \ln x} \sim \frac{e^{3x}}{\ln x} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{\ln x} = +\infty$, si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) Per $x \to +\infty$, valgono le seguenti equivalenze asintotiche:

$$g(x) = \frac{x(x - 5\ln x)\, e^{5x}}{x^3 + \sqrt{x}\, e^x} \sim \frac{x\, x\, e^{5x}}{\sqrt{x}\, e^x} \sim x\sqrt{x}\, e^{4x} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\, e^{4x} = +\infty$, si ha $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

(c) Poiché, per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{e^{3x}}{\ln x}$ e $g(x) \sim x\sqrt{x}\, e^{4x}$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{\ln x}\, \frac{1}{x\sqrt{x}\, e^{4x}} = \frac{1}{\ln x}\, \frac{1}{x\sqrt{x}\, e^x} = 0 \tag{3}$$

Siccome $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, $f(x)$ è $o(g(x))$, per $x \to +\infty$.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 \ln[(x+1)^2] & \text{se } x \neq -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(a) Stabilire se f è derivabile in $x_0 = -1$. $\boxed{f \text{ è derivabile in } x_0 = -1 \text{ e } f'(-1) = 0}$

(b) Trovare i punti di massimo locale di f. $\boxed{x_0 = -1}$

(c) Trovare i punti di minimo locale di f. $\boxed{x_1 = -1 + e^{-1/2}, \qquad x_2 = -1 - e^{-1/2}}$

(d) Disegnare il grafico di f.

Soluzione. Per ogni x in $\mathbb{R}$, $f(x) = g(x+1)$, dove $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita nel modo seguente:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Il grafico di f si ottiene da quello di g mediante una traslazione. Conviene allora studiare g e dedurne informazioni su f. Ad esempio: la funzione g è pari, e quindi il grafico di f sarà simmetrico rispetto alla retta $x = -1$.

La derivabilità di f in $x_0 = -1$ equivale alla derivabilità di g in 0. Calcoliamo allora il limite del rapporto incrementale di g relativo al punto 0, per $x \to 0$:

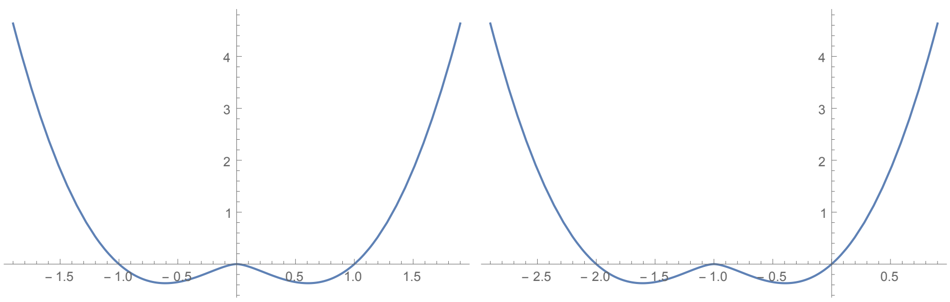
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} x \ln x^2 = \lim_{x\to 0} 2x \ln|x| = 0$$

Concludiamo che g è derivabile in 0 e $g'(0) = 0$. Quindi f è derivabile in $x_0 = -1$ e $f'(-1) = 0$.

Poiché g è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, i punti di massimo locale e di minimo locale di g vanno ricercati fra i punti in cui la derivata prima g' si annulla. Sappiamo già che $g'(0) = 0$; studiando direttamente il segno di g vicino a 0, si vede che $t_0 = 0$ è un punto di massimo locale per g.

In $(0, +\infty)$ la derivata $g'(x) = 2x(1 + 2\ln x)$ si annulla solo in $t_1 = e^{-1/2}$, che è un punto di minimo locale per g. Per simmetria, anche $t_2 = -e^{-1/2}$ è un punto di minimo locale per g.

Ne segue che $x_0 = t_0 - 1 = -1$ è l'unico punto di massimo locale di f, mentre $x_1 = t_1 - 1 = e^{-1/2} - 1$ e $x_2 = t_2 - 1 = -e^{-1/2} - 1$ sono i punti di minimo locale di f.



(a) $g(x) = x^2 \ln(x^2)$. (b) $f(x) = g(x+1) = (x+1)^2 \ln[(x+1)^2]$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e Geometria 1 **Prima Prova** **24 Novembre 2014 Compito D**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Scuola di Ingegneria** **Industriale e dell'Informazione**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 10=4+4+2; Es.2: 8=2+2+4; Es.3: 12=2+4+4+2

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{-1+iz}{iz+i}$$

(a) Scrivere in forma algebrica le controimmagini di $w = 3+i$ (ossia i numeri $z \in \mathbb{C}$ per i quali $f(z) = w$).

$$\boxed{-\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i}$$

(b) Scrivere i punti fissi di f (cioè i punti $z \in \mathbb{C}$ per i quali $f(z) = z$) in forma algebrica.

$$\boxed{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}$$

(c) Scrivere i punti fissi di f in forma trigonometrica.

$$\boxed{\pm\Big(\cos\big(\frac{1}{4}\pi\big) + i\sin\big(\frac{1}{4}\pi\big)\Big)}$$

Soluzione: (a) Le controimmagini di $3+i$ sono gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = 3+i$, cioé

$$\frac{-1+iz}{iz+i} = 3+i \iff -1+iz = 3iz + 3i - z - 1 \iff z = \frac{3i}{1-2i} \iff z = -\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i\,.$$

(b) e (c)

$$f(z) = z \iff \frac{-1+iz}{iz+i} = z \iff -1+iz = iz^2 + iz \iff -1 = iz^2 \iff z^2 = i \iff z = \sqrt{i}\,.$$

In forma trigonometrica, le radici quadrate di $i = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i\sin(\frac{1}{2}\pi)$ sono

$$z_{1,2} = \pm\Big(\cos\big(\frac{1}{4}\pi\big) + i\sin\big(\frac{1}{4}\pi\big)\Big) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,.$$

2. Siano f e g le funzioni definite su $(1, +\infty)$ nel modo seguente:

$$f(x) = \frac{(x + \sqrt{x})\, e^{5x}}{x(e^{3x} - 4) \ln x} \qquad\qquad g(x) = \frac{x(x - 3\ln x)\, e^{6x}}{x^3 + \sqrt{x}\, e^x}$$

(a) Calcolare: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. $\boxed{+\infty}$

(b) Calcolare: $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. $\boxed{+\infty}$

(c) Stabilire se $f(x)$ è $o(g(x))$, per $x \to +\infty$. $\boxed{f(x) \text{ è } o(g(x)), \text{ per } x \to +\infty.}$

Soluzione.

(a) Per $x \to +\infty$, valgono le seguenti equivalenze asintotiche:

$$f(x) = \frac{(x + \sqrt{x})\, e^{5x}}{x(e^{3x} - 4) \ln x} \sim \frac{x\, e^{5x}}{x e^{3x} \ln x} \sim \frac{e^{2x}}{\ln x} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{\ln x} = +\infty$, si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) Per $x \to +\infty$, valgono le seguenti equivalenze asintotiche:

$$g(x) = \frac{x(x - 3\ln x)\, e^{6x}}{x^3 + \sqrt{x}\, e^x} \sim \frac{x\, x\, e^{6x}}{\sqrt{x}\, e^x} \sim x\sqrt{x}\, e^{5x} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\, e^{5x} = +\infty$, si ha $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

(c) Poiché, per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{e^{2x}}{\ln x}$ e $g(x) \sim x\sqrt{x}\, e^{5x}$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{\ln x} \frac{1}{x\sqrt{x}\, e^{5x}} = \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x\sqrt{x}\, e^{3x}} = 0 \tag{4}$$

Siccome $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, $f(x)$ è $o(g(x))$, per $x \to +\infty$.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 \ln[(x+1)^2] & \text{se } x \neq -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(a) Stabilire se f è derivabile in $x_0 = -1$. $\boxed{f \text{ è derivabile in } x_0 = -1 \text{ e } f'(-1) = 0}$

(b) Trovare i punti di massimo locale di f. $\boxed{x_1 = -1 + e^{-1/2}, \qquad x_2 = -1 - e^{-1/2}}$

(c) Trovare i punti di minimo locale di f. $\boxed{x_0 = -1}$

(d) Disegnare il grafico di f.

Soluzione. Per ogni x in $\mathbb{R}$, $f(x) = g(x+1)$, dove $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita nel modo seguente:

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 \ln(x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Il grafico di f si ottiene da quello di g mediante una traslazione. Conviene allora studiare g e dedurne informazioni su f. Ad esempio: la funzione g è pari, e quindi il grafico di f sarà simmetrico rispetto alla retta $x = -1$.

La derivabilità di f in $x_0 = -1$ equivale alla derivabilità di g in 0. Calcoliamo allora il limite del rapporto incrementale di g relativo al punto 0, per $x \to 0$:

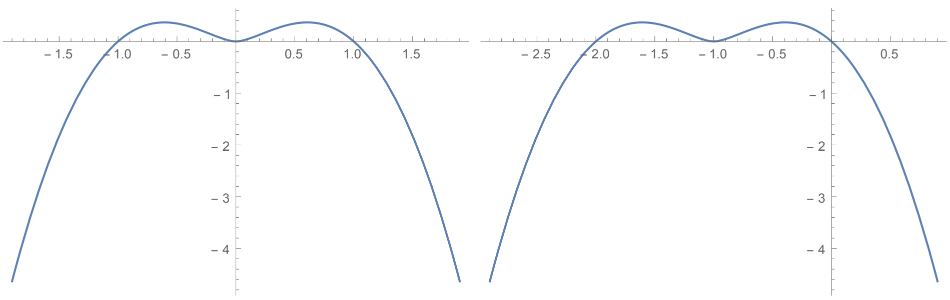
$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2 \ln(x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} -x \ln x^2 = \lim_{x \to 0} -2x \ln |x| = 0$$

Concludiamo che g è derivabile in 0 e $g'(0) = 0$. Quindi f è derivabile in $x_0 = -1$ e $f'(-1) = 0$.

Poiché g è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, i punti di massimo locale e di minimo locale di g vanno ricercati fra i punti in cui la derivata prima g' si annulla. Sappiamo già che $g'(0) = 0$; studiando direttamente il segno di g vicino a 0, si vede che $t_0 = 0$ è un punto di massimo locale per g.

In $(0, +\infty)$ la derivata $g'(x) = -2x(1 + 2\ln x)$ si annulla solo in $t_1 = e^{-1/2}$, che è un punto di massimo locale per g. Per simmetria, anche $t_2 = -e^{-1/2}$ è un punto di massimo locale per g.

Ne segue che $x_0 = t_0 - 1 = -1$ è l'unico punto di minimo locale di f, mentre $x_1 = t_1 - 1 = e^{-1/2} - 1$ e $x_2 = t_2 - 1 = -e^{-1/2} - 1$ sono i punti di massimo locale di f.



(a) $g(x) = -x^2 \ln(x^2)$. (b) $f(x) = g(x+1) = -(x+1)^2 \ln[(x+1)^2]$.