Analisi e Geometria 1 Secondo appello 8 Luglio 2015 Compito A	Docente:	Politecnico di Milano Ingegneria Industriale
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 6 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate***. *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y}{1+x^2} + e^{-\arctan x}\ln(x+1)$$

a) Trovare l'integrale generale.

b) Trovare la soluzione che verifica la condizione $y(0) = 1$.

Soluzione

a) L'equazione è lineare del primo ordine. L'integrale generale è: $y = e^{-\arctan x}\left(\int \ln(x+1)dx + C\right) = e^{-\arctan x}\left(x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} + C\right) = e^{-\arctan x}\big((x+1)\ln(x+1) - x + C\big)$.

$$y = e^{-\arctan x}\big((x+1)\ln(x+1) - x + C\big)\,.$$

b) La soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y = e^{-\arctan x}\big((x+1)\ln(x+1) - x + 1\big)\,.$$

$(C = 1)$

2. Sia f la funzione definita nel modo seguente:

$$[0, \pi] \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad \forall x \in [0, \pi] \qquad f(x) = \cos x \sqrt[3]{\sin x}$$

a) Stabilire in quali punti del suo dominio f è derivabile e trovare i limiti della derivata agli estremi del dominio.

b) Determinare le ascisse dei punti di minimo e di massimo (locali e assoluti) di f nel suo dominio.

c) Disegnare il grafico di f.

Soluzione

a) Si ha che

$$f'(x) = \frac{1 - 4\sin^2 x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}},$$

quindi f è derivabile nel suo dominio esclusi i punti $x = 0, x = \pi$. Si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to \pi -} f'(x) = +\infty.$$

b) La derivata prima si annulla se $x = \frac{\pi}{6}$ e se $x = \frac{5\pi}{6}$, ed è positiva in $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$. Quindi
$x = 0$ é punto di minimo locale,
$x = \frac{\pi}{6}$ é punto di massimo assoluto,
$x = \frac{5\pi}{6}$ é punto di minimo assoluto,
$x = \pi$ é punto di massimo locale.

3. Si consideri la curva parametrizzata $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$C(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Trovare i vettori $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ del riferimento di Frenet nel punto $C(t_0)$, dove $t_0 = \pi/2$.

$$\boxed{\mathbf{T} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad \mathbf{N} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad \mathbf{B} = (0,0,1)}$$

b) Trovare il valore della curvatura κ in $t_0 = \pi/2$.

$$\boxed{k = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{e^{\pi/2}}}$$

c) Scrivere un'equazione cartesiana del piano normale alla curva C nel punto corrispondente al valore $t_0 = \pi/2$.

$$\boxed{-x + y - e^{\pi/2} = 0}$$

Soluzione

$C'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), 0)$

$|C'(t)| = v(t) = \left(e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}e^t$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{C'(t)}{|C'(t)|} = \left(\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Se s è il parametro lunghezza d'arco ($s(t) = \int_{t_0}^t v(t)\, dt$; $\;ds/dt = v(t)$),

$$\begin{aligned} k\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{1}{ds/dt} \quad &= \quad \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{1}{v} \\ &= \left(\frac{-\sin t - \cos t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}, 0\right)\frac{1}{\sqrt{2}e^t} \end{aligned}$$

Poiché $\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \left|\left(\frac{-\sin t - \cos t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}, 0\right)\right| = 1$,

$$\mathbf{N}(t) = \left(\frac{-\sin t - \cos t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}, 0\right), \qquad k = \frac{1}{\sqrt{2}e^t}$$

e

$$\mathbf{B} = (0,0,1) = \mathbf{k}$$

Soluzione alternativa:

Trovare C'';

$\mathbf{B} = C' \times C'' / |C' \times C''|$;

$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$;

$k = \frac{|C' \times C''|}{v^3}$.

Il piano normale nel punto $P_0 = C(\pi/2) = (0, e^{\pi/2}, 2)$ è ortogonale al vettore $\mathbf{T}$ e quindi ha equazione vettoriale $\mathbf{T}\cdot(X - P_0) = 0$. Poiché $\mathbf{T}$ è multiplo di $(-1,1,0)$, un'equazione cartesiana del piano normale è

$$-x + y - e^{\pi/2} = 0$$

4. Si consideri il solido generato dalla rotazione attorno all'asse delle x del grafico della funzione

$$[e, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad\qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}$$

Calcolare il volume del solido

$$\pi \int_e^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx$$

o dimostrare che tale volume è infinito.

$\boxed{\textit{Il volume del solido è } \pi}$

Soluzione

Il volune del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x del grafico della funzione f, definita sull'intervallo illimitato $[e, +\infty)$, è dato dall'integrale improprio

$$\pi \int_e^{+\infty} [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx = \lim_{b \to +\infty} \pi \int_e^b \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx$$

Si può calcolare l'integrale definito $\pi \int_e^b \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx$ con la sostituzione:

$$\ln x = t, \qquad x = e^t, \qquad dx = e^t \, dt$$

Si ottiene

$$\pi \int_e^b \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx = \pi \int_1^{\ln b} \frac{1}{e^t \, t^2} \, e^t \, dt = \pi \int_1^{\ln b} \frac{1}{t^2} \, dt = \pi \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{\ln b} = \pi \left[-\frac{1}{\ln b} + 1 \right]$$

Poiché

$$\lim_{b \to +\infty} \pi \left[-\frac{1}{\ln b} + 1 \right] = \pi$$

concludiamo che il volume cercato è finito e vale π.