Analisi e Geometria 1 Primo appello 16 Febbraio 2015 Compito A	Docente:	Politecnico di Milano Ingegneria Industriale
Cognome:	Nome:	Matricola:

Punteggi degli esercizi: Es.1: 2+2+2=6 punti; Es.2: 6 punti; Es.3: 2+1+1+1+1+1+2+1 punti; Es.4: 2+3+3=8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. i) Parametrizzare la curva $\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2\,, \quad 3z = 2xy\}$.

   ii) Determinare la lunghezza $l(\Gamma_1)$ dell'arco $\Gamma_1 \subset \Gamma$ i cui estremi sono i punti di intersezione di Γ con i piani $P_0 := \{z = 0\}$ e $P_1 := \{z = 2/3\}$.

   iii) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y$. Calcolare l'integrale di f lungo Γ_1.

SOLUZIONE

i) Posto $x := t$ abbiamo

$$\begin{cases} y = x^2, \\ 3z = 2xy \end{cases} \qquad \begin{cases} y = t^2, \\ z = \frac{2}{3}t^3 \end{cases}$$

e $\gamma(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3) \qquad t \in \mathbb{R}$.

ii) Se $\Gamma \cap P_0 \ni (x, y, z)$ allora $z = 0$ e

$$\begin{cases} 0 = xy, \\ y = x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Gamma \cap P_0 = \{(0, 0, 0)\}\,, \qquad (0, 0, 0) = \gamma(0)\,.$$

Se $\Gamma \cap P_1 \ni (x, y, z)$ allora $z = 2/3$ e

$$\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases} \qquad \Gamma \cap P_1 = \{(1, 1, 1)\} \qquad (1, 1, 2/3) = \gamma(1)\,.$$

Poiché $\dot\gamma(t) = (1, 2t, 2t^2)$ e $\|\dot\gamma(t)\| = 1 + 2t^2$ si ha

$$l(\Gamma) = \int_0^1 (1 + 2t^2)\, dt = \frac{5}{3}\,.$$

iii)

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^1 (t^2 + t^2)(1 + 2t^2)\, dt = \frac{22}{15}\,.$$

2. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4}-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin(x)-x\log\left(x^2+1\right)}$$

SOLUZIONE

Per $x \to 0$

$$\frac{\sqrt{1-x^4}-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin(x)-x\log\left(x^2+1\right)} = \frac{1-x^4/2+o(x^5)-(1-x^4/2+o(x^5))}{x^2(x-x^3/6+o(x^4))-x(x^2-x^4/2+o(x^5)} = \frac{o(x^5)}{x^5/3+o(x^6)}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4}-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin(x)-x\log\left(x^2+1\right)} = 0\,.$$

3. Sia data la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t}(1+t)} dt.$

SOLUZIONE

Sia $\varphi(t)$ la funzione integranda, definita sull'insieme $D(\varphi) = (0, +\infty)$.

Limiti agli estremi del dominio:

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \int_1^0 \varphi(t)dt \left(= -\int_0^1 \varphi(t)dt\right) \in \mathbb{R}$ (φ presenta una singolarità integrabile per $x \to 0^+$)

($\Rightarrow$ ponendo $f(0) = -\int_0^1 \varphi(t)dt$, è possibile estendere il dominio di f a $[0, +\infty)$)

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t}(1+t)} dt := L \in \mathbb{R}$ (φ è integrabile per $x \to +\infty$; L non calcolabile esplicitamente)

Asintoti di f: $y = L$ è asintoto orizzontale destro di f

Derivata prima (dominio e formula): $D(f') = (0, +\infty)$, $f'(x) = \varphi(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(1+x)}$

Limite di f' per $x \to 0^+$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$ $\Rightarrow$ $x = 0$ è cuspide (destra) di f

Segno di f' (max/min): $f'(x) > 0 \quad \forall x > 0$ $\Rightarrow$ la funzione è crescente sul suo dominio

Si noti, inoltre, che $x = 0$ è minimo assoluto per f, alla quota $f(0) = -\int_0^1 \varphi(t)dt$ (non calcolabile esplicitamente)

Segno di f (zeri): $f(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 1 \\ = 0 & \text{se } x = 1 \\ < 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x = 1$ è zero di f

Derivata seconda (dominio e formula): $D(f'') = D(f')$, $f''(x) = -\dfrac{e^{-x}(3x^2 + 7x + 1)}{3x^{4/3}(1+x)^2}$

Segno di f'' (flessi): $f''(x) < 0 \quad \forall x > 0$ $\Rightarrow$ la funzione è concava sul suo dominio

4. i) Determinare le soluzioni dell'equazione $w^2 - (2+i)w + 1 + i = 0$.

ii) Determinare le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} w^2 - (2+i)w + 1 + i = 0, \\ w = z^3. \end{cases}$$

iii) Siano dati la funzione $f(z) = (-1+\sqrt{3}i)z$ e l'insieme

$$S = \left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}z \leq 1/2 \text{ e } (\mathrm{Im}z)^2 = 3(\mathrm{Re}z)^2\right\}.$$

Determinare l'insieme $f(S)$ e rappresentarlo sul piano complesso.

SOLUZIONE

i) Utilizzando le consuete formule, si vede facilmente che l'equazione ammette le soluzioni

$$w_1 = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) \quad \text{e} \quad w_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

ii) Poichè la prima equazione del sistema è quella risolta al punto i), dovremo trovare le radici cubiche di 1 e $1+i$. Passando alle coordinate polari e usando la formula di De Moivre, si ha quindi

$$z^3 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\vartheta = 2k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta_k = \frac{2}{3}k\pi\,(k = 0,1,2) \end{cases}$$

da cui deduciamo che

$$\sqrt[3]{1} = \left\{1, \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right), \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right\};$$

$$z^3 = 1 + i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3 = \sqrt{2} \\ 3\vartheta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[6]{2} \\ \vartheta_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\,(k = 0,1,2) \end{cases}$$

da cui deduciamo che

$$\sqrt[3]{1+i} = \left\{2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right], 2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right], 2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right]\right\}.$$

Per concludere osserviamo che l'insieme delle soluzioni del sistema è $\sqrt[3]{1} \cup \sqrt[3]{1+i}$.

iii) Poichè $-1 + \sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]$, si vede quindi che la funzione f rappresenta geometricamente una roto-dilatazione (rotazione di angolo $\frac{2}{3}\pi$ e dilatazione di modulo 2). Notiamo inoltre che S è l'unione dei segmenti che passano per $z = 0$ ed i punti $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, rispettivamente. Tale insieme in coordinate polari ammette la rappresentazione

$$S = \left\{(\rho, \vartheta) : 0 < \rho \leq 1 \text{ e } \vartheta = \frac{\pi}{3}\right\} \cup \left\{(\rho, \vartheta) : 0 < \rho \leq 1 \text{ e } \vartheta = -\frac{\pi}{3}\right\} \cup \{0\}.$$

Avremo quindi che

$$f(S) = \left\{(\rho, \vartheta) : 0 < \rho \leq 2 \text{ e } \vartheta = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{3} = \pi\right\} \cup \left\{(\rho, \vartheta) : 0 < \rho \leq 2 \text{ e } \vartheta = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\right\} \cup \{0\}.$$

Analisi e Geometria 1 **Primo appello** **16 Febbraio 2015 Compito B**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate***. *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. i) Parametrizzare la curva $\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 = x\,, \quad 3z = 2xy\}$.

   ii) Determinare la lunghezza $l(\Gamma_1)$ dell'arco $\Gamma_1 \subset \Gamma$ i cui estremi sono i punti di intersezione di Γ con i piani $P_0 := \{z = 0\}$ e $P_1 := \{z = 2/3\}$.

   iii) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y^2$. Calcolare l'integrale di f lungo Γ_1.

SOLUZIONE

i) Posto $y := t$ abbiamo

$$\begin{cases} x = y^2, \\ 3z = 2xy \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t^2, \\ z = \frac{2}{3}t^3 \end{cases}$$

e $\gamma(t) = (t^2, t, \frac{2}{3}t^3) \qquad t \in \mathbb{R}$.

ii) Se $\Gamma \cap P_0 \ni (x, y, z)$ allora $z = 0$ e

$$\begin{cases} 0 = xy, \\ x = y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Gamma \cap P_0 = \{(0,0,0)\}\,, \qquad (0,0,0) = \gamma(0)\,.$$

Se $\Gamma \cap P_1 \ni (x, y, z)$ allora $z = 2/3$ e

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x = y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases} \qquad \Gamma \cap P_1 = \{(1,1,1)\} \qquad (1,1,2/3) = \gamma(1)\,.$$

Poiché $\dot{\gamma}(t) = (2t, 1, 2t^2)$ e $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1 + 2t^2$ si ha

$$l(\Gamma) = \int_0^1 (1 + 2t^2)\, dt = \frac{5}{3}\,.$$

iii)

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^1 (t^2 + t^2)(1 + 2t^2)\, dt = \frac{22}{15}\,.$$

2. Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-x^4}-\cos\left(2x^2\right)}{x^2\sin(x)-x\log\left(x^2+1\right)}$$

SOLUZIONE

Per $x \to 0$

$$\frac{\sqrt{1-x^4}-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin(x)-x\log\left(x^2+1\right)} = \frac{1-x^4/2+o(x^5)-(1-2x^4+o(x^5))}{x^2(x-x^3/6+o(x^4))-x(x^2-x^4/2+o(x^5)} = \frac{3x^4/2+o(x^5)}{x^5/3+o(x^6)}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-x^4}-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin(x)-x\log\left(x^2+1\right)} = +\infty\,.$$

3. Sia data la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t}(1+t)} dt$.

SOLUZIONE

Sia $\varphi(t)$ la funzione integranda, definita sull'insieme $D(\varphi) = (0, +\infty)$.

Limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \int_2^0 \varphi(t)dt \left(= -\int_0^2 \varphi(t)dt\right) \in \mathbb{R}$ (φ presenta una singolarità integrabile per $x \to 0^+$)   ($\Rightarrow$ ponendo $f(0) = -\int_0^2 \varphi(t)dt$, è possibile estendere il dominio di f a $[0, +\infty)$) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \int_2^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t}(1+t)} dt := L \in \mathbb{R}$ (φ è integrabile per $x \to +\infty$; L non calcolabile esplicitamente)
Asintoti di f: $y = L$ è asintoto orizzontale destro di f
Derivata prima (dominio e formula): $D(f') = (0, +\infty)$, $f'(x) = \varphi(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(1+x)}$
Limite di f' **per** $x \to 0^+$: $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$ $\Rightarrow$ $x = 0$ è cuspide (destra) di f
Segno di f' **(max/min)**: $f'(x) > 0 \quad \forall x > 0$ $\Rightarrow$ la funzione è crescente sul suo dominio   Si noti, inoltre, che $x = 0$ è minimo assoluto per f, alla quota $f(0) = -\int_0^2 \varphi(t)dt$ (non calcolabile esplicitamente)
Segno di f **(zeri)**: $f(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 2 \\ = 0 & \text{se } x = 2 \\ < 0 & \text{se } 0 \le x < 2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x = 2$ è zero di f
Derivata seconda (dominio e formula): $D(f'') = D(f')$, $f''(x) = -\frac{e^{-x}(3x^2 + 7x + 1)}{3x^{4/3}(1+x)^2}$
Segno di f'' **(flessi)**: $f''(x) < 0 \quad \forall x > 0$ $\Rightarrow$ la funzione è concava sul suo dominio

4. i) Determinare le soluzioni dell'equazione $w^2 - (2-i)w + 1 - i = 0$.

ii) Determinare le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} w^2 - (2-i)w + 1 - i = 0, \\ w = z^3. \end{cases}$$

iii) Siano dati la funzione $f(z) = (1+\sqrt{3}i)z$ e l'insieme

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 \le \mathrm{Re} z \le 1/2 \text{ e } (\mathrm{Im} z)^2 = 3(\mathrm{Re} z)^2 \right\}.$$

Determinare l'insieme $f(S)$ e rappresentarlo sul piano complesso.

SOLUZIONE

i) Utilizzando le consuete formule, si vede facilmente che l'equazione ammette le soluzioni

$$w_1 = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) \quad \text{e} \quad w_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right].$$

ii) Poichè la prima equazione del sistema è quella risolta al punto i), dovremo trovare le radici cubiche di 1 e $1+i$. Passando alle coordinate polari e usando la formula di De Moivre, si ha quindi

$$z^3 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\vartheta = 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta_k = \frac{2}{3}k\pi \ (k = 0, 1, 2) \end{cases}$$

da cui deduciamo che

$$\sqrt[3]{1} = \left\{ 1, \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right), \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \right\};$$

$$z^3 = 1 - i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3 = \sqrt{2} \\ 3\vartheta = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[6]{2} \\ \vartheta_k = \frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi \ (k = 0, 1, 2) \end{cases}$$

da cui deduciamo che

$$\sqrt[3]{1-i} = \left\{ 2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right], 2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right], 2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{23}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{23}{12}\pi\right)\right] \right\}.$$

Per concludere osserviamo che l'insieme delle soluzioni del sistema è $\sqrt[3]{1} \cup \sqrt[3]{1+i}$.

iii) Poichè $1 + \sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$, si vede quindi che la funzione f rappresenta geometricamente una roto-dilatazione (rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ e dilatazione di modulo 2). Notiamo inoltre che S è l'unione dei segmenti che passano per $z = 0$ ed i punti $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, rispettivamente. Tale insieme in coordinate polari ammette la rappresentazione

$$S = \left\{ (\rho, \vartheta) : 0 < \rho \le 1 \text{ e } \vartheta = \frac{\pi}{3} \right\} \cup \left\{ (\rho, \vartheta) : 0 < \rho \le 1 \text{ e } \vartheta = -\frac{\pi}{3} \right\} \cup \{0\}.$$

Avremo quindi che

$$f(S) = \left\{ (\rho, \vartheta) : 0 < \rho \le 2 \text{ e } \vartheta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \right\} \cup \left\{ (\rho, \vartheta) : 0 < \rho \le 2 \text{ e } \vartheta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0 \right\} \cup \{0\}.$$

Analisi e Geometria 1 **Primo appello** **16 Febbraio 2015** **Compito C**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. i) Parametrizzare la curva $\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2\,, \quad 3y = 2xz\}$.

   ii) Determinare la lunghezza $l(\Gamma_1)$ dell'arco $\Gamma_1 \subset \Gamma$ i cui estremi sono i punti di intersezione di Γ con i piani $P_0 := \{y = 0\}$ e $P_1 := \{y = 2/3\}$.

   iii) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + z$. Calcolare l'integrale di f lungo Γ_1.

SOLUZIONE

i) Posto $x := t$ abbiamo

$$\begin{cases} z = x^2, \\ 3y = 2xz \end{cases} \qquad \begin{cases} z = t^2, \\ y = \frac{2}{3}t^3 \end{cases}$$

e $\gamma(t) = (t, \frac{2}{3}t^3, t^2) \qquad t \in \mathbb{R}$.

ii) Se $\Gamma \cap P_0 \ni (x, y, z)$ allora $y = 0$ e

$$\begin{cases} 0 = xz, \\ z = x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ z = 0 \end{cases} \qquad \Gamma \cap P_0 = \{(0, 0, 0)\}\,, \qquad (0, 0, 0) = \gamma(0)\,.$$

Se $\Gamma \cap P_1 \ni (x, y, z)$ allora $y = 2/3$ e

$$\begin{cases} xz = 1, \\ z = x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1, \\ z = 1 \end{cases} \qquad \Gamma \cap P_1 = \{(1, 1, 1)\} \qquad (1, 2/3, 1) = \gamma(1)\,.$$

Poiché $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t^2, 2t)$ e $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1 + 2t^2$ si ha

$$l(\Gamma) = \int_0^1 (1 + 2t^2)\, dt = \frac{5}{3}\,.$$

iii)

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^1 (t^2 + t^2)(1 + 2t^2)\, dt = \frac{22}{15}\,.$$

2. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^3}-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin(x)-x\log\left(x^2+1\right)}$$

SOLUZIONE

Per $x \to 0$
$$\frac{\sqrt{1-x^3}-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin(x)-x\log\left(x^2+1\right)} = \frac{1-x^3/2+o(x^4)-(1-x^4/2+o(x^5))}{x^2(x-x^3/6+o(x^4))-x(x^2-x^4/2+o(x^5)} = \frac{-x^3/2+o(x^4)}{x^5/3+o(x^6)}$$

Quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4}-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin(x)-x\log\left(x^2+1\right)} = -\infty\,.$$

3. Sia data la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t}(1+t)}dt \left(= -\int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t}(1+t)}dt \right)$.

SOLUZIONE

Sia $\varphi(t)$ la funzione integranda, definita sull'insieme $D(\varphi) = (0, +\infty)$.

Limiti agli estremi del dominio:

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \int_0^1 \varphi(t)dt \in \mathbb{R}$ (φ presenta una singolarità integrabile per $x \to 0^+$)

($\Rightarrow$ ponendo $f(0) = \int_0^1 \varphi(t)dt$, è possibile estendere il dominio di f a $[0, +\infty)$)

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t}(1+t)}dt := L \in \mathbb{R}$ (φ è integrabile per $x \to +\infty$; L non calcolabile esplicitamente)

Asintoti di f: $y = L$ è asintoto orizzontale destro di f

Derivata prima (dominio e formula): $D(f') = (0, +\infty)$, $f'(x) = -\varphi(x) = -\dfrac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(1+x)}$

Limite di f' per $x \to 0^+$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ $x = 0$ è cuspide (destra) di f

Segno di f' (max/min): $f'(x) < 0$ $\forall x > 0$ $\Rightarrow$ la funzione è decrescente sul suo dominio

Si noti, inoltre, che $x = 0$ è massimo assoluto per f, alla quota $f(0) = \int_0^1 \varphi(t)dt$ (non calcolabile esplicitamente)

Segno di f (zeri): $f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x > 1 \\ = 0 & \text{se } x = 1 \\ > 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x = 1$ è zero di f

Derivata seconda (dominio e formula): $D(f'') = D(f')$, $f''(x) = \dfrac{e^{-x}(3x^2 + 7x + 1)}{3x^{4/3}(1+x)^2}$

Segno di f'' (flessi): $f''(x) < 0$ $\forall x < 0$ $\Rightarrow$ la funzione è convessa sul suo dominio

4. i) Determinare le soluzioni dell'equazione $w^2 - (2+i)w + 1 + i = 0$.

ii) Determinare le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} w^2 - (2+i)w + 1 + i = 0, \\ w = -z^3. \end{cases}$$

iii) Siano dati la funzione $f(z) = (-1+\sqrt{3}i)z$ e l'insieme

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 \le \mathrm{Im}z \le \sqrt{3}/2 \text{ e } (\mathrm{Im}z)^2 = 3(\mathrm{Re}z)^2 \right\}.$$

Determinare l'insieme $f(S)$ e rappresentarlo sul piano complesso.

SOLUZIONE

i) Utilizzando le consuete formule, si vede facilmente che l'equazione ammette le soluzioni

$$w_1 = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) \quad \text{e} \quad w_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

ii) Poichè la prima equazione del sistema è quella risolta al punto i), dovremo trovare le radici cubiche di -1 e $-1-i$. Passando alle coordinate polari e usando la formula di De Moivre, si ha quindi

$$z^3 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\vartheta = \pi + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \ (k = 0,1,2) \end{cases}$$

da cui deduciamo che

$$\sqrt[3]{-1} = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), -1, \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) \right\};$$

$$z^3 = -1 - i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3 = \sqrt{2} \\ 3\vartheta = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[6]{2} \\ \vartheta_k = \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi \ (k = 0,1,2) \end{cases}$$

da cui deduciamo che

$$\sqrt[3]{-1-i} = \left\{ 2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right], 2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right], 2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{13}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{13}{12}\pi\right)\right] \right\}.$$

Per concludere osserviamo che l'insieme delle soluzioni del sistema è $\sqrt[3]{-1} \cup \sqrt[3]{-1-i}$.

iii) Poichè $-1 + \sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]$, si vede quindi che la funzione f rappresenta geometricamente una roto-dilatazione (rotazione di angolo $\frac{2}{3}\pi$ e dilatazione di modulo 2). Notiamo inoltre che S è l'unione dei segmenti che passano per $z = 0$ ed i punti $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, rispettivamente. Tale insieme in coordinate polari ammette la rappresentazione

$$S = \left\{ (\rho, \vartheta) : 0 < \rho \le 1 \text{ e } \vartheta = \frac{\pi}{3} \right\} \cup \left\{ (\rho, \vartheta) : 0 < \rho \le 1 \text{ e } \vartheta = \frac{2}{3}\pi \right\} \cup \{0\}.$$

Avremo quindi che

$$f(S) = \left\{ (\rho, \vartheta) : 0 < \rho \le 2 \text{ e } \vartheta = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{3} = \pi \right\} \cup \left\{ (\rho, \vartheta) : 0 < \rho \le 2 \text{ e } \vartheta = \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \right\} \cup \{0\}.$$

Analisi e Geometria 1 **Primo appello** **16 Febbraio 2015 Compito D**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. i) Parametrizzare la curva $\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z^2\,, \quad 3x = 2zy\}$.

   ii) Determinare la lunghezza $l(\Gamma_1)$ dell'arco $\Gamma_1 \subset \Gamma$ i cui estremi sono i punti di intersezione di Γ con i piani $P_0 := \{x = 0\}$ e $P_1 := \{x = 2/3\}$.

   iii) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = y + z^2$. Calcolare l'integrale di f lungo Γ_1.

SOLUZIONE

i) Posto $x := t$ abbiamo

$$\begin{cases} y = z^2, \\ 3x = 2zy \end{cases} \qquad \begin{cases} y = t^2, \\ x = \frac{2}{3}t^3 \end{cases}$$

e $\gamma(t) = (\frac{2}{3}t^3, t^2, t) \qquad t \in \mathbb{R}$.

ii) Se $\Gamma \cap P_0 \ni (x, y, z)$ allora $x = 0$ e

$$\begin{cases} 0 = zy, \\ y = z^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \qquad \Gamma \cap P_0 = \{(0, 0, 0)\}\,, \qquad (0, 0, 0) = \gamma(0)\,.$$

Se $\Gamma \cap P_1 \ni (x, y, z)$ allora $x = 2/3$ e

$$\begin{cases} yz = 1, \\ y = z^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1, \\ z = 1 \end{cases} \qquad \Gamma \cap P_1 = \{(1, 1, 1)\} \qquad (2/3, 1, 1) = \gamma(1)\,.$$

Poiché $\dot{\gamma}(t) = (2t^2, 2t, 1)$ e $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1 + 2t^2$ si ha

$$l(\Gamma) = \int_0^1 (1 + 2t^2)\, dt = \frac{5}{3}\,.$$

iii)

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^1 (t^2 + t^2)(1 + 2t^2)\, dt = \frac{22}{15}\,.$$

2. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4}-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin(x)-x\log\left(x+1\right)}$$

SOLUZIONE

Per $x \to 0$
$$\frac{\sqrt{1-x^4}-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin(x)-x\log\left(x+1\right)} = \frac{1-x^4/2+o(x^5)-(1-x^4/2+o(x^5))}{x^2(x-x^3/6+o(x^4))-x(x-x^2/2+o(x^5)} = \frac{o(x^5)}{-x^2+o(x^2)}$$

Quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4}-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin(x)-x\log\left(x+1\right)} = 0\,.$$

3. Sia data la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \displaystyle\int_x^2 \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t}(1+t)} dt \left(= - \int_2^x \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t}(1+t)} dt \right)$.

SOLUZIONE

Sia $\varphi(t)$ la funzione integranda, definita sull'insieme $D(\varphi) = (0, +\infty)$.

Limiti agli estremi del dominio:

$\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \int_0^2 \varphi(t) dt \in \mathbb{R}$ (φ presenta una singolarità integrabile per $x \to 0^+$)

($\Rightarrow$ ponendo $f(0) = \int_0^2 \varphi(t) dt$, è possibile estendere il dominio di f a $[0, +\infty)$)

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = - \int_2^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t}(1+t)} dt := L \in \mathbb{R}$ (φ è integrabile per $x \to +\infty$; L non calcolabile esplicitamente)

Asintoti di f: $y = L$ è asintoto orizzontale destro di f

Derivata prima (dominio e formula): $D(f') = (0, +\infty)$, $\quad f'(x) = -\varphi(x) = -\dfrac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(1+x)}$

Limite di f' per $x \to 0^+$: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ è cuspide (destra) di f

Segno di f' (max/min): $f'(x) < 0 \quad \forall x > 0 \quad \Rightarrow$ la funzione è decrescente sul suo dominio

Si noti, inoltre, che $x = 0$ è massimo assoluto per f, alla quota $f(0) = \int_0^2 \varphi(t) dt$ (non calcolabile esplicitamente)

Segno di f (zeri): $f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x > 2 \\ = 0 & \text{se } x = 2 \\ > 0 & \text{se } 0 \leq x < 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 2$ è zero di f

Derivata seconda (dominio e formula): $D(f'') = D(f')$, $\quad f''(x) = \dfrac{e^{-x}(3x^2 + 7x + 1)}{3x^{4/3}(1+x)^2}$

Segno di f'' (flessi): $f''(x) < 0 \quad \forall x < 0 \quad \Rightarrow$ la funzione è convessa sul suo dominio

4. i) Determinare le soluzioni dell'equazione $w^2-(2-i)w+1-i=0$.

ii) Determinare le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} w^2-(2-i)w+1-i=0, \\ w=-z^3. \end{cases}$$

iii) Siano dati la funzione $f(z)=(1+\sqrt{3}i)z$ e l'insieme

$$S=\left\{z\in\mathbb{C}: 0\le \text{Im}z\le \sqrt{3}/2 \text{ e } (\text{Im}z)^2=3(\text{Re}z)^2\right\}.$$

Determinare l'insieme $f(S)$ e rappresentarlo sul piano complesso.

SOLUZIONE

i) Utilizzando le consuete formule, si vede facilmente che l'equazione ammette le soluzioni

$$w_1=1=1(\cos 0+i\sin 0) \quad \text{e} \quad w_2=1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right].$$

ii) Poichè la prima equazione del sistema è quella risolta al punto i), dovremo trovare le radici cubiche di -1 e $-1+i$. Passando alle coordinate polari e usando la formula di De Moivre, si ha quindi

$$z^3=-1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3=1 \\ 3\vartheta=\pi+2k\pi,\ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho=1 \\ \vartheta_k=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi\ (k=0,1,2) \end{cases}$$

da cui deduciamo che

$$\sqrt[3]{-1}=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right), -1, \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right\};$$

$$z^3=-1+i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3=\sqrt{2} \\ 3\vartheta=\frac{3}{4}\pi+2k\pi,\ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho=\sqrt[6]{2} \\ \vartheta_k=\frac{\pi}{4}\pi+\frac{2}{3}k\pi\ (k=0,1,2) \end{cases}$$

da cui deduciamo che

$$\sqrt[3]{-1+i}=\left\{2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right], 2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{13}{12}\pi\right)+i\sin\left(\frac{13}{12}\pi\right)\right], 2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right)+i\sin\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right]\right\}.$$

Per concludere osserviamo che l'insieme delle soluzioni del sistema è $\sqrt[3]{-1}\cup\sqrt[3]{-1+i}$.

iii) Poichè $1+\sqrt{3}i=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$, si vede quindi che la funzione f rappresenta geometricamente una roto-dilatazione (rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ e dilatazione di modulo 2). Notiamo inoltre che S è l'unione dei segmenti che passano per $z=0$ ed i punti $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, rispettivamente. Tale insieme in coordinate polari ammette la rappresentazione

$$S=\left\{(\rho,\vartheta): 0<\rho\le 1 \text{ e } \vartheta=\frac{\pi}{3}\right\}\cup\left\{(\rho,\vartheta): 0<\rho\le 1 \text{ e } \vartheta=\frac{2}{3}\pi\right\}\cup\{0\}.$$

Avremo quindi che

$$f(S)=\left\{(\rho,\vartheta): 0<\rho\le 2 \text{ e } \vartheta=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi\right\}\cup\left\{(\rho,\vartheta): 0<\rho\le 2 \text{ e } \vartheta=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi=\pi\right\}\cup\{0\}.$$