Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Prima prova in itinere – 19 Novembre 2012**

Cognome: ______________________ **Compito A**
Nome: ______________________
Matricola: ______________________

Es. 1: 6 punti	**Es. 2**: 6 punti	**Es. 3**: 12 punti	**Es. 4**: 6 punti	**Totale**

1. Sia
$$z_0 = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} .$$
   (a) Scrivere $(z_0)^{28}$ in forma algebrica ($z_0 = a + b\,\mathrm{i}$, con $a, b \in \mathbb{R}$).
   (b) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi
$$A = \{w \in \mathbb{C} \ : \ 0 \le \operatorname{Re} w \le 1\,,\ 0 \le \operatorname{Im} w \le 1\}$$
$$B = z_0 A = \{w' \in \mathbb{C} \ : \ w' = z_0 w,\ w \in A\}\,.$$

2. Sia f la funzione definita da $f(x) = x - 2\operatorname{artg} x$.
   (a) Determinare gli eventuali asintoti.
   (b) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo locali.

3. Sia f la funzione definita da
$$f(x) = \left(1 + \sqrt{\frac{x}{2-x}}\right) \mathrm{e}^{-\sqrt{1-x}} .$$
   (a) Determinare il campo di esistenza D della funzione f.
   (b) Dimostrare che la funzione f è crescente su D.
   (c) Determinare l'immagine di f.

4. Sia f la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x - 1} & \text{se } x > 1 \\ (x-1)^2 + a(x-1) + 1 & \text{se } x \le 1 \end{cases}$$
   dove a è un parametro reale.
   (a) Determinare i valori di a per i quali la funzione f è continua nel punto $x_0 = 1$.
   (b) Determinare i valori di a per i quali la funzione f è derivabile nel punto $x_0 = 1$.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Prima prova in itinere – 19 Novembre 2012**

Cognome: ______________________________ **Compito B**

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Es. 1: 6 punti	**Es. 2**: 6 punti	**Es. 3**: 12 punti	**Es. 4**: 6 punti	**Totale**

1. Sia
$$z_0 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,.$$
   (a) Scrivere $(z_0)^{56}$ in forma algebrica ($z_0 = a + b\,\mathrm{i}$, con $a, b \in \mathbb{R}$).

   (b) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi
$$A = \{w \in \mathbb{C} \ : \ 0 \le \operatorname{Re} w \le 2\,,\ 0 \le \operatorname{Im} w \le 1\}$$
$$B = z_0 A = \{w' \in \mathbb{C} \ : \ w' = \ z_0 w,\ w \in A\}\,.$$

2. Sia f la funzione definita da $f(x) = x - 4\,\mathrm{artg}\, x$.

   (a) Determinare gli eventuali asintoti.

   (b) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo locali.

3. Sia f la funzione definita da
$$f(x) = 2\left(1 + \sqrt{\frac{x}{2-x}}\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{1-x}}\,.$$
   (a) Determinare il campo di esistenza D della funzione f .

   (b) Dimostrare che la funzione f è crescente su D .

   (c) Determinare l'immagine di f .

4. Sia f la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} & \text{se } x > 1 \\ (x-1)^2 + 4a(x-1) + 1 & \text{se } x \le 1 \end{cases}$$
   dove a è un parametro reale.

   (a) Determinare i valori di a per i quali la funzione f è continua nel punto $x_0 = 1$.

   (b) Determinare i valori di a per i quali la funzione f è derivabile nel punto $x_0 = 1$.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

Soluzioni del compito A

1. (a) Poiché $z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$, utilizzando la formula di De Moivre, si ha

$$z_0^{28} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^{28} = \cos\frac{28\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{28\pi}{3}\,.$$

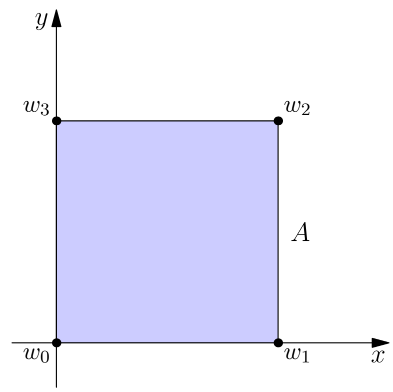
Poiché

$$\frac{28\pi}{3} = \frac{(4+24)\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 8\pi\,,$$

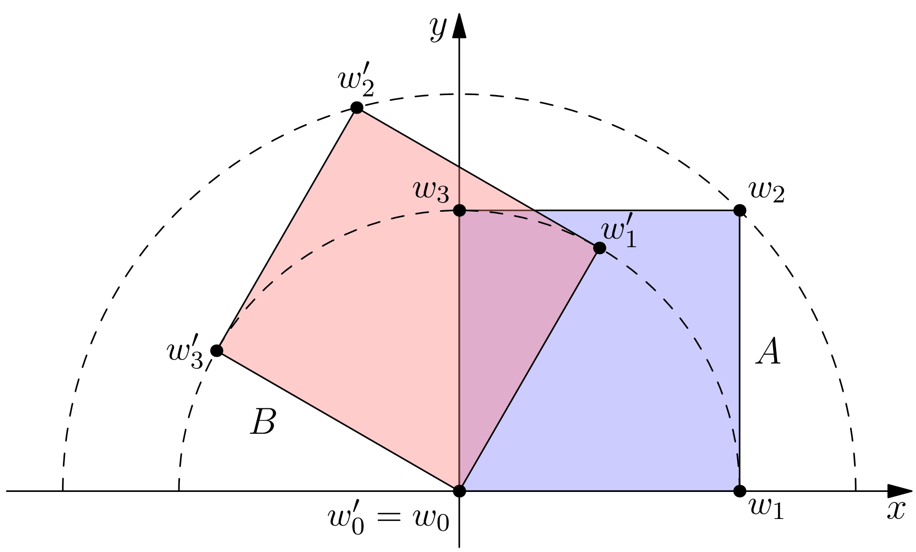
si ha

$$z_0^{28} = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = -z_0\,.$$

(b) L'insieme A è il quadrato di vertici $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, $w_2 = 1 + \mathrm{i}$, $w_3 = \mathrm{i}$.



L'insieme B si ottiene moltiplicando ogni elemento di A per il numero complesso z_0, che ha modulo 1 e argomento $\theta = \pi/3$. Quindi B è l'insieme che si ottiene ruotando di un angolo $\theta = \pi/3$, in senso antiorario attorno all'origine, l'insieme A:



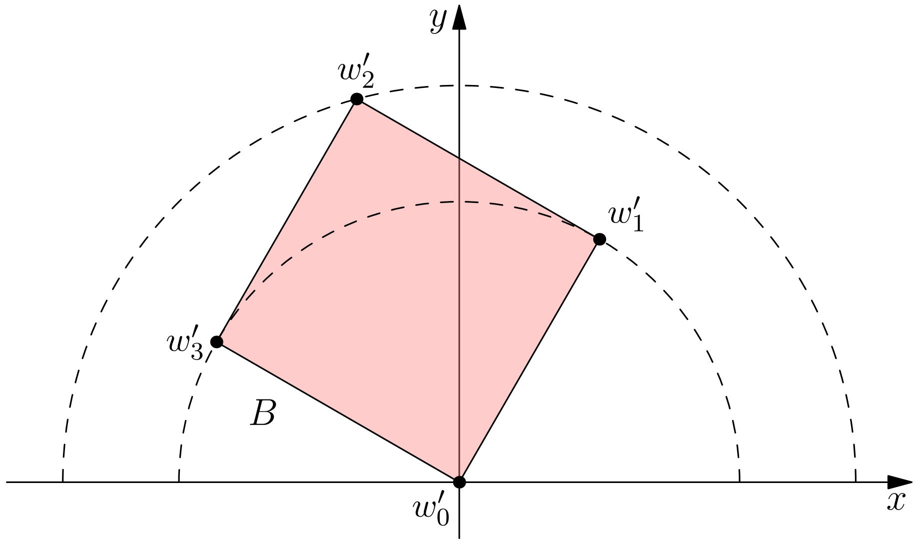
Più precisamente, B è il quadrato di vertici

$$w_0' = 0$$

$$w_1' = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2' = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$$

$$w_3' = \cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\,.$$



2. (a) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Quindi non ci sono asintoti verticali. Inoltre, poiché la funzione arcotangente è limitata, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(x - 2\operatorname{artg} x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty}(x - 2\operatorname{artg} x) = -\infty\,.$$

Non ci sono asintoti verticali. Tuttavia, come vedremo, ci sono asintoti obliqui. Infatti, si ha

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - 2\frac{\operatorname{artg} x}{x}\right) = 1 \\ q &= \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}(x - 2\operatorname{artg} x - x) = \lim_{x\to+\infty}(-2\operatorname{artg} x) = -\pi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - 2\frac{\operatorname{artg} x}{x}\right) = 1 \\ q &= \lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty}(x - 2\operatorname{artg} x - x) = \lim_{x\to-\infty}(-2\operatorname{artg} x) = \pi\,. \end{aligned}$$

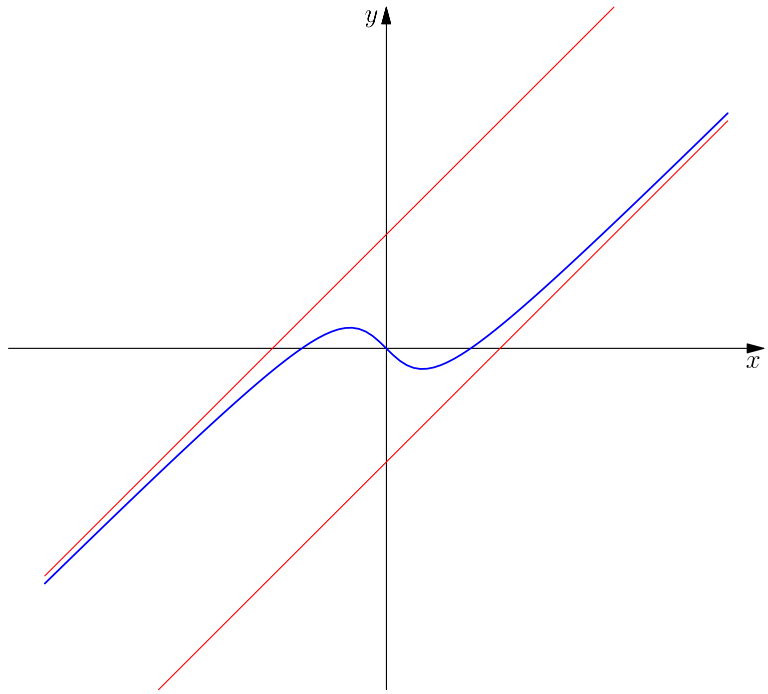
Quindi, si ha l'asintoto obliquo di equazione $y = x - \pi$ per $x \to +\infty$, e si ha l'asintoto obliquo di equazione $y = x + \pi$ per $x \to -\infty$.

(b) Si ha

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}\,.$$

Quindi, $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - 1 \geq 0$, ossia $x \leq -1$ e $x \geq 1$. Di conseguenza, in $x_1 = -1$ si ha l'unico punto di massimo locale, dato da $M \equiv (-1, -1+\pi/2)$, e in $x_2 = 1$ si ha l'unico punto di minimo locale, dato da $m \equiv (1, 1-\pi/2)$.

(c) Grafico della funzione (non richiesto):



3. (a) Affinché la funzione data sia definita si deve avere

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2-x} \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ x \leq 1\,. \end{cases}$$

Quindi $D = [0,1]$.

(b) La funzione f è crescente essendo il prodotto di due funzioni positive crescenti. Oppure, equivalentemente, basta osservare che

$$f'(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x}}\,\frac{1}{(2-x)^2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{1-x}} + \left(1+\sqrt{\frac{x}{2-x}}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}} \geq 0$$

per ogni $x \in (0,1)$.

(c) La funzione f è continua ed è definita su un intervallo chiuso e limitato. Di conseguenza, per il teorema di Weierstrass e il teorema dei valori intermedi, la sua immagine è un intervallo chiuso e limitato. Inoltre, poiché f è crescente, i valori massimi e minimi verranno assunti agli estremi dell'intervallo D su cui è definita. Poiché $f(0) = \mathrm{e}^{-1}$ e $f(1) = 2$, si ha $\operatorname{Im} f = [\mathrm{e}^{-1}, 2]$.

4. (a) La funzione f è definita e continua da sinistra nel punto $x_0 = 1$. Quindi, poiché

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1 \qquad \text{e} \qquad f(1) = 1\,,$$

la funzione f è continua in $x_0 = 1$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(b) Si ha

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^2 + a(x-1)+1-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x-1+a) = a$$

e

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2}\,,$$

dove il penultimo passaggio è stato ottenuto utilizzando la regola di De l'Hôspital. Quindi la funzione f è derivabile in $x_0 = 1$ per $a = 1/2$.