Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Terzo appello – 9 Settembre 2013**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Compito A

Es. 1: 6 punti	**Es. 2**: 8 punti	**Es. 3**: 6 punti	**Es. 4**: 10 punti	**Totale**

1. Rappresentare sul piano di Gauss il luogo dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|e^{\mathbf{i}z^2+1}| < 1 \, .$$

2. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = \ln t \end{cases} \qquad t \in [3, 8] \, .$$

Verificare che la curva è regolare e calcolare la sua lunghezza. (Nel calcolo della lunghezza della curva, si consiglia di effettuare la sostituzione $u = \sqrt{1+t^2}$).

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x^2+1)y' = \dfrac{x}{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e stabilire il più ampio intervallo in cui è definita la soluzione.

4. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x \ln x}{\ln x - 3} \, .$$

   (a) Determinare il dominio D di f .

   (b) Calcolare i limiti ai bordi di D e determinare gli eventuali asintoti di f .

   (c) Calcolare la derivata prima f .

   (d) Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f , specificando se assoluti o relativi.

Soluzioni

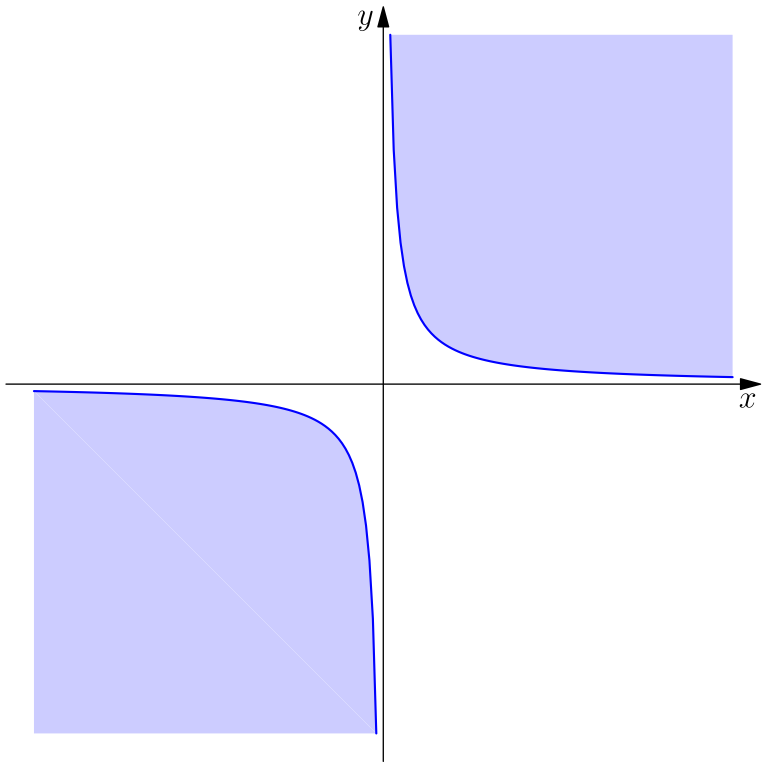
1. Posto $z = x + \mathbf{i}y$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$|\mathrm{e}^{\mathbf{i}z^2+1}| = |\mathrm{e}^{\mathbf{i}(x+\mathbf{i}y)^2+1}| = |\mathrm{e}^{\mathbf{i}(x^2-y^2)-2xy+1}| = \left|\mathrm{e}^{-2xy+1}\left(\cos(x^2-y^2) + i\sin(x^2-y^2)\right)\right| = \mathrm{e}^{-2xy+1}\,.$$

Pertanto, si ha

$$|\mathrm{e}^{\mathbf{i}z^2+1}| < 1 \iff -2xy+1 < 0 \iff xy > \frac{1}{2}\,.$$

Dunque, se Γ è l'iperbole di equazione $xy = 1/2$, il luogo cercato è formato dai punti del primo quadrante strettamente al di sopra del ramo di Γ e dai punti del terzo quadrante strettamente al di sotto del ramo di Γ, come si vede nella seguente figura



2. Sia $f(t) = (\sin t, \cos t, \ln t)$. Allora, si ha $f'(t) = (\cos t, -\sin t, 1/t)$ e

$$||f'(t)|| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \neq 0 \qquad \text{per ogni } t \in [3, 8]\,.$$

Quindi, la curva γ è regolare. La sua lunghezza è

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_3^8 ||f'(t)||\,\mathrm{d}t = \int_3^8 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Con la sostituzione $u = \sqrt{1+t^2}$, si ha $t^2 = u^2 - 1$ e quindi $t\,\mathrm{d}t = u\,\mathrm{d}u$. Pertanto, l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
L &= \int_3^8 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,t\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{10}}^{\sqrt{65}} \frac{u^2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{10}}^{\sqrt{65}} \frac{u^2-1+1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\sqrt{10}}^{\sqrt{65}} \left(1 + \frac{1}{(u-1)(u+1)}\right)\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{10}}^{\sqrt{65}} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{u-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \left[u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{\sqrt{10}}^{\sqrt{65}} = \sqrt{65} - \sqrt{10} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{65}-1}{\sqrt{65}+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\,.
\end{aligned}$$

3. L'equazione è a variabili separabili e non ha soluzioni costanti. La generica soluzione si ottiene dall'uguaglianza

$$\int y \, \mathrm{d}y = \int \frac{x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$$

da cui segue

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$$

e quindi

$$y(x) = \pm\sqrt{\ln(x^2+1) + 2c}\,.$$

Imponendo la condizione $y(0) = -1$, si trova $c = 1/2$ e quindi la soluzione

$$y(x) = -\sqrt{\ln(x^2+1) + 1}\,,$$

che risulta definita su tutto $\mathbb{R}$.

4. (a) Si ha $D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0,\ x \neq \mathrm{e}^3\} = (0, \mathrm{e}^3) \cup (\mathrm{e}^3, +\infty)$.

(b) Si hanno i limiti

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \ln x}{\ln x - 3} = \lim_{x\to 0^+} x = 0\\
&\lim_{x\to (e^3)^+} f(x) = \lim_{x\to (e^3)^+} \frac{x \ln x}{\ln x - 3} = \lim_{t\to 3^+} \frac{t\mathrm{e}^t}{t-3} = +\infty \qquad (t = \ln x)\\
&\lim_{x\to (e^3)^-} f(x) = \lim_{x\to (e^3)^-} \frac{x \ln x}{\ln x - 3} = \lim_{t\to 3^-} \frac{t\mathrm{e}^t}{t-3} = -\infty \qquad (t = \ln x)\\
&\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x \ln x}{\ln x - 3} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty\,.
\end{aligned}$$

Non ci sono asintoti obliqui, perché

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 3} = 1\\
&\lim_{x\to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{\ln x - 3} = +\infty\,.
\end{aligned}$$

(c) La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{\ln^2 x - 3\ln x - 3}{(\ln x - 3)^2}\,.$$

(d) Si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln x \leq \frac{3-\sqrt{21}}{2} \quad \text{oppure} \quad \ln x \geq \frac{3+\sqrt{21}}{2}\\
&\Longleftrightarrow \quad x \leq \mathrm{e}^{\frac{3-\sqrt{21}}{2}} \quad \text{oppure} \quad x \geq \mathrm{e}^{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, in corrispondenza di $x = \mathrm{e}^{\frac{3-\sqrt{21}}{2}}$ si ha un punto di massimo relativo, mentre in corrispondenza di $x = \mathrm{e}^{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}$ si ha un punto di minimo relativo.