Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Primo appello – 13 Febbraio 2012**

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Compito A

Es. 1: 7 punti	**Es. 2**: 12 punti	**Es. 3**: 7 punti	**Es. 4**: 7 punti	**Es. 5**:	**Totale**

1. (a) Sia $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Si scriva la formula per trovare tutti i $w \in \mathbb{C}$ tali che $w^n = z$.
   (b) Si disegnino con precisione sul piano di Gauss i seguenti insiemi di numeri complessi:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, 1 \le |z| < 8\,,\ \frac{\pi}{3} \le \arg z < \pi \right\}$$
$$B = \{ w \in \mathbb{C} \,:\, w = (1 - \mathbf{i}\sqrt{3})\, z\,,\ z \in A \}$$
$$C = \{ v \in \mathbb{C} \,:\, v^3 = w\,,\ w \in B \}\,.$$

2. Si studi la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{|x| - 1}}{x^2 + 1}\,.$$

Dominio di f. Eventuali simmetrie. Segno di f. Limiti agli estremi. Eventuali asintoti. Derivata prima. Zeri e segno di f'. Eventuali punti di massimo o minimo. Immagine di f. Minimo numero di flessi compatibili con le informazioni ricavate. Grafico di f.

3. (a) Si dica perché il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{6}{t^2 + t - 2}\, y + \dfrac{1}{3} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

   ammette esattamente una soluzione (senza trovarla).
   (b) Dopo aver trovato l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{6}{t^2 + t - 2}\, y + \frac{1}{3}\,,$$

   si trovi la soluzione del problema di Cauchy assegnato nel punto precedente.

4. Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 - \cos t \\ z = t^3 - t^2 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

e sia P_0 il punto di γ corrispondente a $t = 0$.

   (a) Si scriva la retta tangente a γ in P_0 in forma parametrica.
   (b) Si scriva l'equazione del piano osculatore a γ in P_0 in forma cartesiana.
   (c) Si determinino i versori della terna intrinseca di γ in P_0.
   (d) Si scrivano le equazioni cartesiane delle due sfere di raggio $\sqrt{21}$ che sono tangenti al piano osculatore nel punto P_0.

5. (Domanda di teoria facoltativa) Si enunci e si dimostri il teorema del valor medio di Lagrange.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore + 15 minuti per la domanda di teoria.