Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Terzo appello – 5 Settembre 2011**

Cognome: ______________________
Nome: ______________________
Matricola: ______________________

Compito A

Es. 1: 6 punti	**Es. 2**: 12 punti	**Es. 3**: 6 punti	**Es. 4**: 6 punti	**Es. 5**: 3 punti	**Totale**

1. Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt[3]{1-x^2}}{(\operatorname{artg} x)^\alpha} & \text{se } x > 0 \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

può essere prolungata con continuità su tutto $\mathbb{R}$.

2. Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \ln(\mathrm{e}^x - x).$$

(Dominio di f, segno di f, limiti agli estremi, eventuali asintoti, derivata prima, derivabilità di f, eventuali punti di massimo o minimo locali e assoluti, derivata seconda, convessità e concavità, grafico di f.)

3. Sia data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{1-y}.$$

   (a) Trovare l'integrale generale.
   (b) Risolvere il problema di Cauchy che associa all'equazione il dato iniziale $y(0) = 2$, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

4. Calcolare l'integrale curvilineo

$$I = \int_\gamma \frac{xy \sin y}{\sqrt{1+x^2}} ds$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2/2 \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

5. (Domanda di teoria) Enunciare e dimostrare la formula di De Moivre.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore + 15 minuti per la domanda di teoria.

Soluzioni

1. La funzione f è definita e continua in tutti i punti $x \neq 0$. Di conseguenza bisogna calcolare il valore del limite destro e sinistro di f in $x = 0$. Per quanto riguarda il limite destro, utilizzando gli sviluppi di MacLaurin opportuni, si hanno le seguenti equivalenze asintotiche

$$1 - \sqrt[3]{1-x^2} \sim \frac{x^2}{3} \qquad \text{e} \qquad (\operatorname{artg} x)^\alpha \sim x^\alpha$$

per $x \to 0^+$. Di conseguenza, tornando al limite, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0^+ & \text{se } \alpha < 2, \\ \frac{\sqrt{1}}{3} & \text{se } \alpha = 2, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Inoltre, il limite sinistro vale 0 per ogni α. Di conseguenza, f è prolungabile con continuità su tutto $\mathbb{R}$ per $\alpha < 2$.

2. (a) **Dominio di** f. Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$, poiché si ha $\mathrm{e}^x > x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ (come si può dedurre da un semplice confronto grafico).

   (b) **Segno di** f. Si ha $f(x) > 0$ per $x \neq 0$ e $f(x) = 0$ per $x = 0$ (come può essere dedotto facilmente per confronto grafico tra le funzioni e^x e $x + 1$).

   (c) **Limiti agli estremi**. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

   (d) **Eventuali asintoti**. La retta $y = x$ è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, mentre per $x \to -\infty$ la funzione non ammette asintoti.

   (e) **Derivata prima**. Si ha

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}\,.$$

   (f) **Studio del segno di** f'. Si ha $f'(x) > 0$ in $(0, +\infty)$, $f'(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$ e $f'(x) = 0$ per $x = 0$.

   (g) **Estremanti di** f. La funzione f ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$. Non esistono massimi.

   (h) **Derivata seconda**. Si ha

$$f''(x) = -\frac{(x-2)\mathrm{e}^x + 1}{(\mathrm{e}^x - x)^2}\,.$$

   (i) **Studio del segno di** f''. Studiando (ancora una volta per confronto grafico) la diseguaglianza $\mathrm{e}^{-x} > 2 - x$, si deduce l'esistenza due punti $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ tali che $f''(x) > 0$ in (α, β), $f''(x) < 0$ in $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$ e $f''(x) = 0$ per $x = \alpha, \beta$.

   (j) **Concavità**. $x = \alpha$ e $x = \beta$ sono punti di flesso per f.

   (k) **Grafico di** f.

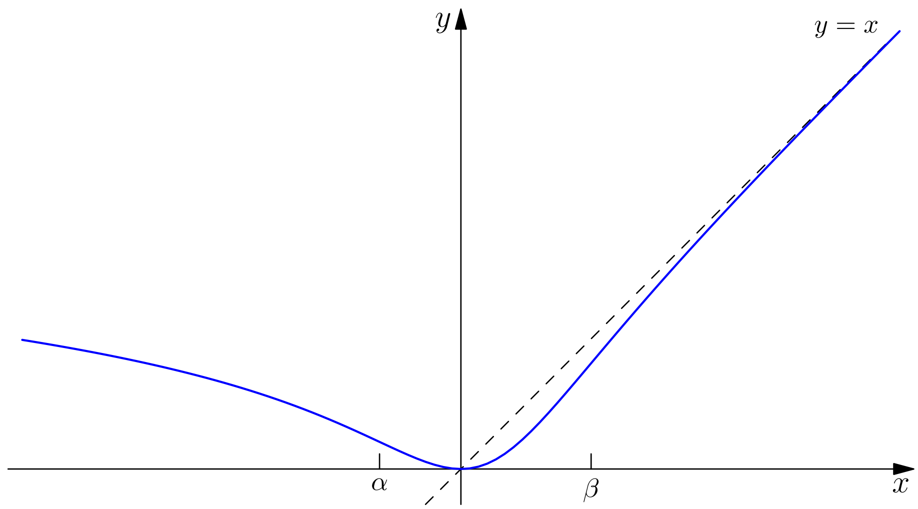

Figura 1: Grafico di $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x - x)$

3. (a) L'equazione è a variabili separabili. Notiamo preliminarmente che, affinchè l'equazione abbia senso, deve essere $y(x) \neq 1$ sul suo insieme di definizione. Notiamo anche che non sono presenti soluzioni costanti, perchè il secondo membro non è mai nullo. Allora, procedendo per separazione di variabili, si ha

$$\int (1-y)\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$$

ossia

$$-\frac{(1-y)^2}{2} = x + c$$

dove c è una costante reale arbitraria. Pertanto, la soluzione può essere scritta come

$$y(x) = 1 \pm \sqrt{c - 2x}\,.$$

Quindi l'integrale generale è dato da

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \sqrt{c-2x}, \quad \text{se} \quad y(x) > 1 \\ y(x) &= 1 - \sqrt{c-2x}, \quad \text{se} \quad y(x) < 1 \end{aligned}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

(b) Si noti che la condizione di Cauchy $y(0) = 2$ forza la soluzione ad essere sempre maggiore di 1. Di conseguenza, la formula di rappresentazione opportuna è la prima delle due. Imponendo $y(0) = 2$, si trova $1 + \sqrt{c} = 2$ ossia $c = 1$. Quindi, la soluzione cercata è

$$y(x) = 1 + \sqrt{1-2x}.$$

Tale funzione è soluzione dell'equazione data nell'intervallo $(-\infty, 1/2)$.

4. Poiché

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t\,,$$

si ha

$$I = \int_0^1 \frac{t^3}{2}\,\sin\frac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^2 \cdot t \sin\frac{t^2}{2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\left[-t^2\cos\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 2t\cos\frac{t^2}{2}\, \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{1}{2} + 2\left[\sin\frac{t^2}{2}\right]_0^1\right) = -\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$