Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Secondo appello – 11 Luglio 2011**

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Compito A

Es. 1: 6 punti	**Es. 2**: 6 punti	**Es. 3**: 6 punti	**Es. 4**: 12 punti	**Es. 5**: 3 punti	**Totale**

1. Risolvere nel campo complesso la seguente equazione:
$$z^2 - z\,\overline{z} + 4 - \mathbf{i} = 0\,.$$

2. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia
$$I = \int_0^{+\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-ax^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$$
   (a) Determinare i valori del parametro reale a per i quali l'integrale generalizzato I è convergente.
   (b) Calcolare il valore dell'integrale I quando $a = 1$.

3. Sia r la retta che passa per i punti $A \equiv (2,-1,3)$ e $B \equiv (1,-1,2)$ dello spazio $\mathbb{R}^3$.
   (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente il punto A e ortogonale alla retta r.
   (b) Trovare le coordinate del punto $X_0 \in \pi$ per il quale è minima la distanza dall'origine. Calcolare tale minima distanza.

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = x^2 + \operatorname{artg} x$$
per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Con un confronto grafico, si stabilisca in quanti punti la funzione f si annulla.
   (b) Discutere l'esistenza di eventuali asintoti.
   (c) Stabilire in quanti punti la funzione derivata f' si annulla, specificando se si tratta di punti di minimo, di massimo o di flesso.
   (d) Scrivere il polinomio di Taylor di f di ordine 2, centrato nell'origine.
   (e) Disegnare un grafico qualitativo di f.

5. (Domanda di teoria) Ricavare le equazioni parametriche di una retta nello spazio.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore + 15 minuti per la domanda di teoria.

Soluzioni

1. Posto $z = x + \mathbf{i}y$, si ha $\overline{z} = x - \mathbf{i}y$ e $z\overline{z} = x^2 + y^2$. Quindi l'equazione data diventa

$$x^2 + 2\mathbf{i}xy - y^2 - x^2 - y^2 + 4 - \mathbf{i} = 0$$

ossia

$$-2y^2 + 2ixy = -4 + \mathbf{i}$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} -2y^2 = -4 \\ 2xy = 1\,. \end{cases}$$

Questo sistema ha due soluzioni:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2}\right) \qquad \text{e} \qquad (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ -\sqrt{2}\right).$$

Quindi le soluzioni dell'equazione di partenza sono

$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \mathbf{i}\,\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad z_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \mathbf{i}\,\sqrt{2}\,.$$

2. (a) Per $a \leq 0$, la funzione integranda tende all'infinito per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale diverge a $+\infty$. Se invece $a > 0$, si ha definitivamente (ad esempio)

$$\mathrm{e}^{-ax^2+1} < \frac{1}{x^5}$$

e quindi

$$x^3\mathrm{e}^{-ax^2+1} < \frac{1}{x^2}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto, per ogni $a > 0$ l'integrale converge. In conclusione, l'integrale I è convergente se e solo se $a > 0$.

(b) Usando il metodo di integrazione per parti, si ha:

$$\begin{aligned}\int x^3\mathrm{e}^{-x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int -\frac{1}{2}\,x^2\,[(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2+1}]\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{e}^{-x^2+1} - \int(-x)\,\mathrm{e}^{-x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{e}^{-x^2+1} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2+1}\,.\end{aligned}$$

Quindi, si ha

$$\int_0^{+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^3\mathrm{e}^{-x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\Big[-\frac{1}{2}\,x^2\,e^{-x^2+1} - \frac{1}{2}\,e^{-x^2+1}\Big]_0^b = \frac{\mathrm{e}}{2}\,.$$

(c) i. Un vettore che ha la medesima direzione della retta r è $\mathbf{v} = A - B = (1, 0, 1)$. Pertanto, il piano π ha equazione $1(x-2) + 0(y+1) + 1(z-3) = 0$, ossia

$$x + z - 5 = 0\,.$$

ii. Il punto $X_0 \in \pi$ a distanza minima dall'origine è l'intersezione del piano π con la retta passante per l'origine e ortogonale a π, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\,. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $x + z - 5 = 0$ del piano π, si ottiene $t = \frac{5}{2}$ e quindi $X_0 \equiv (5/2, 0, 5/2)$. Infine, la distanza del punto X_0 dall'origine è $5/\sqrt{2}$.

(d) i. La funzione $f(x) = x^2 + \operatorname{artg} x$ si annulla quando $\operatorname{artg} x = -x^2$. I grafici di $\operatorname{artg} x$ e $-x^2$ si intersecano in due punti: Quindi la funzione $f(x)$ si annulla

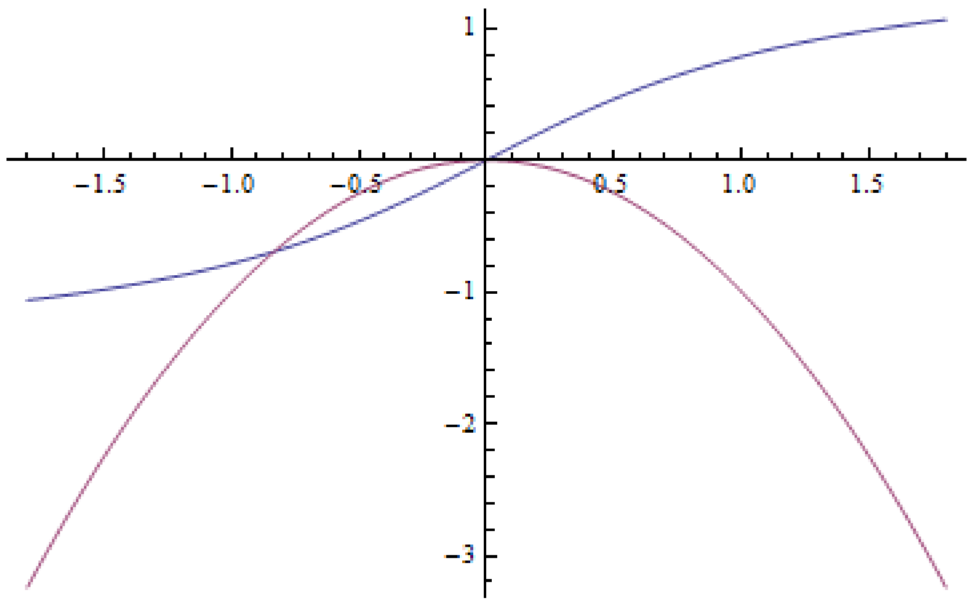

Figura 1: Grafici di $\operatorname{artg} x$ e di $-x^2$.

in due punti. Più precisamente, si annulla in un punto $x_1 = \alpha$, con $\alpha < 0$, e in $x_2 = 0$. Poiché $f(-1) = 1 + \operatorname{artg}(-1) = 1 - \pi/4 = (4 - \pi)/4 > 0$, si ha $-1 < \alpha < 0$.

ii. Ovviamente non ci sono asintoti verticali. Dal momento che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali. Per vedere se ci sono asintoti obliqui, occorre anzitutto studiare i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x$. Poiché si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \operatorname{artg} x}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + \operatorname{artg} x}{x} = -\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui. Alla stessa conclusione si giunge osservando che $x^2 + \operatorname{artg} x \sim x^2$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Concludendo, la funzione f non ha asintoti.

iii. La funzione $f(x)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^3+2x+1}{1+x^2}\,.$$

Poiché il numeratore $g(x) = 2x^3 + 2x + 1$ è un polinomio di terzo grado strettamente crescente ($g'(x) = 6x^2 + 2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$), la derivata $f'(x)$ si annulla esattamente in un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Poichè $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, tale punto $\overline{x}$ deve essere un punto di minimo (assoluto).

iv. Il polinomio Taylor di $f(x)$ di ordine 2 centrato nell'origine (ossia il polinomio di MacLaurin di ordine 2) è

$$T_2(f(x);x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 = x + x^2\,.$$

v. Il grafico di $f(x)$ è il seguente:

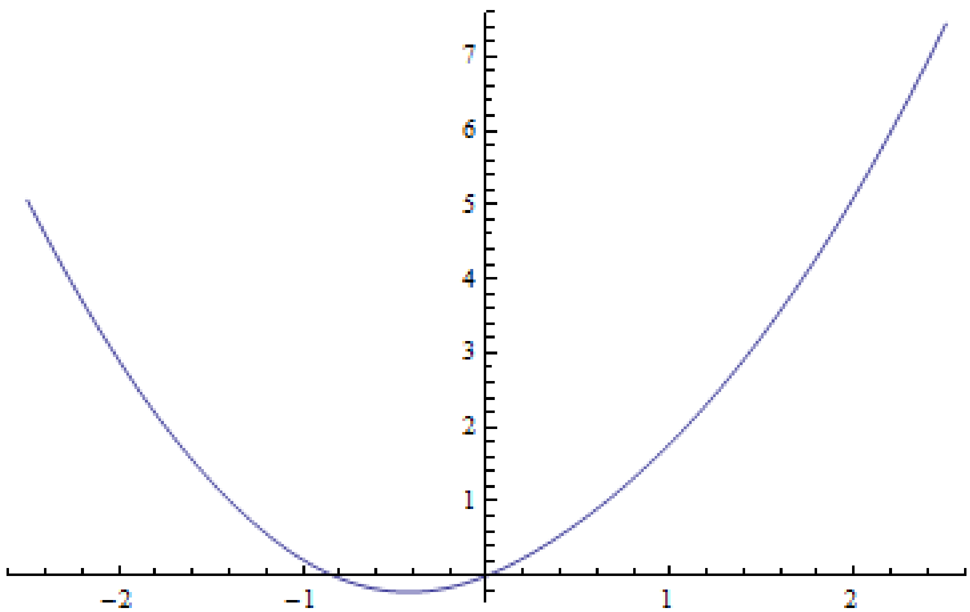

Figura 2: Grafico di $f(x) = x^2 + \operatorname{artg} x$