Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 Seconda prova in itinere 01 Febbraio 2010 Compito A	Docente:	Politecnico di Milano Ingegneria Industriale
Cognome:	Nome:	Matricola:

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate***. *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. (a) Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 (2x+2)\arctan x\,dx$$

PRIMITIVA: $(x^2+2x+1)\arctan x - \ln(x^2+1) - x + c$

INTEGRALE: $-\ln 2 + \pi - 1$

(b) Stabilire se il seguente integrale generalizzato è convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)\sin^2 x}{(1+x)x^{7/2}}\,dx$$

Indicata con f la funzione integranda, per $x \to 0^+$ risulta $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$
e per $x \to +\infty$ risulta $|f(x)| = o(\frac{1}{x^{7/2}})$, per cui L'INTEGRALE È CONVERGENTE.

2. Sia r la retta intersezione dei piani di equazioni $x - y + 2z - 1 = 0$ e $2x + y + z = 0$.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} - t \\ y = -\frac{2}{3} + t \\ z = t \end{cases}$$

   (b) Scrivere l'equazione del piano ortogonale a r che passa per il punto $P \equiv (0, 1, 2)$.

$$-x + y + z - 3 = 0$$

   (c) Calcolare la distanza del punto P dalla retta r.

PUNTO DI INTERSEZIONE RETTA-PIANO:

$$H \equiv \left(-1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

DISTANZA PUNTO-RETTA:

$$\overline{PH} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

3. Sia γ l'arco di curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \ .$$

(a) Calcolare il versore $\mathbf{T}$ tangente a γ nel punto P della curva corrispondente al valore $t = \pi$.

$$\mathbf{T} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$$

(b) Scrivere l'equazione del piano che passa per P parallelo a $\mathbf{T}$ e al vettore $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

$$3(x+1) + y + (z - \pi) = 0$$

(c) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{2}xyz \, ds$.

$$\int_0^{2\pi} t \sin 2t \, dt = -\pi$$

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t^2 - t} \\ y(2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int \frac{1}{t^2 - t} \, dt$$

$$y = k \frac{t - 1}{t}$$

$$y(2) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow k = 1$$

5. Domanda di teoria.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere** **01 Febbraio 2010 Compito B**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate***. *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. (a) Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 (2-2x)\arctan x \, dx$$

PRIMITIVA: $(-x^2+2x-1)\arctan x - \ln(x^2+1) + x + c$

INTEGRALE: $1 - \ln 2$

(b) Stabilire se il seguente integrale generalizzato è convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)\sin x}{(1+x)x^{7/2}} \, dx$$

Indicata con f la funzione integranda, per $x \to 0^+$ risulta $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$

e per $x \to +\infty$ risulta $|f(x)| = o(\frac{1}{x^{7/2}})$, per cui L'INTEGRALE È CONVERGENTE.

2. Sia r la retta intersezione dei piani di equazioni $y - x + 2z - 1 = 0$ e $2y + x + z = 0$.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r.

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3} + t \\ y = \frac{1}{3} - t \\ z = t \end{cases}$$

(b) Scrivere l'equazione del piano ortogonale a r che passa per il punto $P \equiv (1, 0, 2)$.

$$x - y + z - 3 = 0$$

(c) Calcolare la distanza del punto P dalla retta r.

PUNTO DI INTERSEZIONE RETTA-PIANO:

$$H \equiv \left(\frac{2}{3}, -1, \frac{4}{3}\right)$$

DISTANZA PUNTO-RETTA:

$$\overline{PH} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

3. Sia γ l'arco di curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{con} \quad 0 \le t \le 2\pi \ .$$

(a) Calcolare il versore $\mathbf{T}$ tangente a γ nel punto P della curva corrispondente al valore $t = \pi$.

$$\mathbf{T} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$$

(b) Scrivere l'equazione del piano che passa per P parallelo a $\mathbf{T}$ e al vettore $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

$$x + (y+1) + (z - \pi) = 0$$

(c) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{2}xyz\, ds$.

$$\int_0^{2\pi} t \sin 2t\, dt = -\pi$$

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t - t^2} \\ y(2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{t - t^2}\, dt$$

$$y = k \frac{t}{t - 1}$$

$$y(2) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

5. Domanda di teoria.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere** **01 Febbraio 2010 Compito C**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate***. *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. (a) Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 (4x-2)\arctan x \, dx$$

PRIMITIVA: $(2x^2 - 2x + 2)\arctan x + \ln(x^2+1) - 2x + c$

INTEGRALE: $\ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$

(b)

Stabilire se il seguente integrale generalizzato è convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)\sin^2 x}{(1+x)x^{10/3}} \, dx$$

Indicata con f la funzione integranda, per $x \to 0^+$ risulta $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

e per $x \to +\infty$ risulta $|f(x)| = o(\frac{1}{x^{10/3}})$, per cui L'INTEGRALE È CONVERGENTE.

2. Sia r la retta intersezione dei piani di equazioni $-x+y-2z-1=0$ e $2x+y+z=0$.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r.

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}-t \\ y=\frac{2}{3}+t \\ z=t \end{cases}$$

(b) Scrivere l'equazione del piano ortogonale a r che passa per il punto $P \equiv (0,2,1)$.

$$-x+y+z-3=0$$

(c) Calcolare la distanza del punto P dalla retta r.

PUNTO DI INTERSEZIONE RETTA-PIANO:

$$H \equiv \left(-1, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

DISTANZA PUNTO-RETTA:

$$\overline{PH} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

3. Sia γ l'arco di curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{con} \quad 0 \le t \le \pi \ .$$

(a) Calcolare il versore $\mathbf{T}$ tangente a γ nel punto P della curva corrispondente al valore $t = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\mathbf{T} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

(b) Scrivere l'equazione del piano che passa per P parallelo a $\mathbf{T}$ e al vettore $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

$$5(x+1) + y + 2\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

(c) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{2}{\sqrt{5}} xyz \, ds$.

$$\int_0^\pi t \sin 4t \, dt = -\frac{\pi}{4}$$

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t^2+t} \\ y(2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{t^2+t}\, dt$$

$$y = k\frac{t}{t+1}$$

$$y(2) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow k = \frac{3}{4}$$

5. Domanda di teoria.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere** **01 Febbraio 2010 Compito D**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate****. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. (a) Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 (4+2x)\arctan x \, dx$$

PRIMITIVA: $(x^2+4x+1)\arctan x - 2\ln(x^2+1) - x + c$

INTEGRALE: $-2\ln 2 + \frac{3}{2}\pi - 1$

(b) Stabilire se il seguente integrale generalizzato è convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)\sin x}{(1+x)x^{10/3}} \, dx$$

Indicata con f la funzione integranda, per $x \to 0^+$ risulta $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

e per $x \to +\infty$ risulta $|f(x)| = o(\frac{1}{x^{10/3}})$, per cui L'INTEGRALE È CONVERGENTE.

2. Sia r la retta intersezione dei piani di equazioni $x - y - 2z - 1 = 0$ e $2x + y - z = 0$.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{2}{3} - t \\ z = t \end{cases}$$

(b) Scrivere l'equazione del piano ortogonale a r che passa per il punto $P \equiv (0, 1, -2)$.

$$x - y + z + 3 = 0$$

(c) Calcolare la distanza del punto P dalla retta r.

PUNTO DI INTERSEZIONE RETTA-PIANO:

$$H \equiv \left(-1, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

DISTANZA PUNTO-RETTA:

$$\overline{PH} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

3. Sia γ l'arco di curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -\cos 2t \\ y = \sin 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad \text{con} \quad 0 \leq t \leq \pi \ .$$

(a) Calcolare il versore $\mathbf{T}$ tangente a γ nel punto P della curva corrispondente al valore $t = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\mathbf{T} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

(b) Scrivere l'equazione del piano che passa per P parallelo a $\mathbf{T}$ e al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

$$4(x-1) + y - 2\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

(c) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{2}{\sqrt{5}} xyz \, ds$.

$$\int_0^\pi t \sin 4t \, dt = -\frac{\pi}{4}$$

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{t^2 + 2t} \\ y(2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{2}{t^2 + 2t}\, dt$$

$$y = k \frac{t}{t+2}$$

$$y(2) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow k = 1$$

5. Domanda di teoria.