Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Prima prova in itinere.** **16 novembre 2009** **Compito C**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.
Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia $f(x) = \dfrac{\cos\sqrt[3]{x} - e^{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x}}{\ln(1-\sin\sqrt[3]{x})}$

   (a) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0} f(x)$. Risposta: $\boxed{0}$

   (b) Esistono un numero $K \neq 0$ e un numero $\alpha > 0$ per i quali si abbia $f(x) \sim Kx^{\alpha}$, per $x \to 0$? In caso affermativo, determinare una tale funzione Kx^{α}. Risposta: $\boxed{x^{\frac{1}{3}}}$

   (c) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in un intorno del punto $x_0 = 0$.

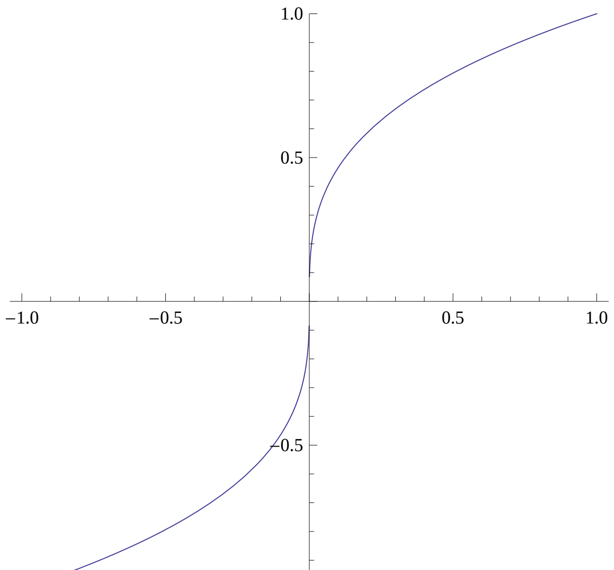

Figura 1: Grafico, vicino a $x_0 = 0$, di $x^{\frac{1}{3}}$

Giustificare le risposte, riportando i calcoli:

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{2x}$$

Insieme di definizione di f: $(0, +\infty)$
Limiti agli estremi: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
Eventuali asintoti: $x = 0$ (asintoto verticale); $y = 0$ (asintoto orizzontale).
Derivata prima: $f'(x) = -\dfrac{\ln x}{2x^2}$
Qual è il più grande intervallo sul quale f è crescente? $(0, 1]$ Qual è il più grande intervallo sul quale f è decrescente? $[1, +\infty)$
Eventuali punti di massimo o minimo locale (specificando se sono punti di massimo o di minimo): L'unico punto di massimo locale è $x_0 = 1$. Non ci sono punti di minimo locale.
Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 1}{2x^3}$
Studio della convessità e della concavità : f è concava su $(0, \sqrt{e})$; f è convessa su $(\sqrt{e}, +\infty)$.
Disegnare un grafico qualitativo di f:
Disegnare un grafico qualitativo di $\lvert f(x)\rvert$ (valore assoluto di x).
Esistono punti in cui la funzione $\lvert f(x)\rvert$ *non* è derivabile? Motivare la risposta. La funzione $\lvert f(x)\rvert$ non è derivabile in $x_0 = \dfrac{1}{e}$.

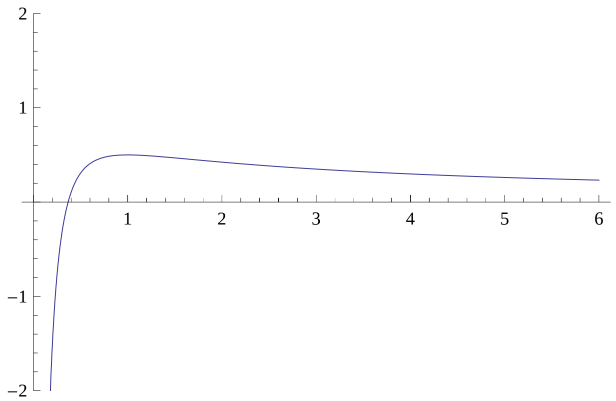

Figura 2: Grafico di $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{2x}$

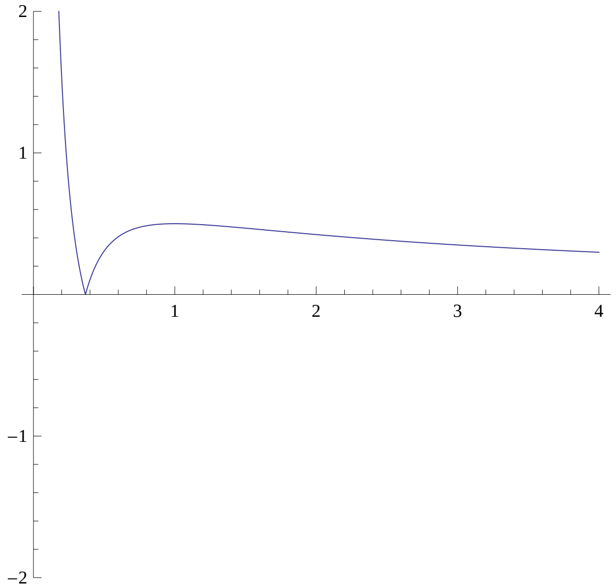

Figura 3: Grafico di $|f(x)| = \left|\dfrac{1 + \ln x}{2x}\right|$

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ b - 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali eventuali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x_0 = 0$.

Risposta: f è continua in $x_0 = 0$ se $a > 0$ e $b = 2$

(b) Usando la definizione di derivata, determinare gli eventuali $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f è derivabile in $x_0 = 0$.

Risposta: f è derivabile in $x_0 = 0$ se $a > 1$ e $b = 2$

Giustificare le risposte, riportando i calcoli:

4. Si consideri l'equazione

$$(z-i)^3 = (1-i\sqrt{3})^3$$

nel campo complesso $\mathbb{C}$.

(a) Scrivere tutte le soluzioni, nella forma algebrica $a+ib$:

$$\boxed{-2+i, \qquad 1+i(\sqrt{3}+1), \qquad 1-i(\sqrt{3}+1)}$$

(b) Disegnare tutte le soluzioni sul piano complesso:

Motivare le risposte, riportando i calcoli:

Domande di teoria