Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	T.	Totale

Analisi e Geometria 1 **COMPITO A**	**Docenti:** **F. Colombo, G. Mola, E. Munarini**	**11/11/2008** **Ing. Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi: Es.1 = 6 punti, Es.2 = 12 punti, Es.3 = 6 punti, Es.4 = 6 punti.
Punteggio minimo per superare la prova: 18 punti.
Tempo: due ore.

1. Utilizzando il teorema degli zeri stabilire se la seguente equazione

$$xe^x - \sin x = 2x^2 e^x (x - \pi) + 1$$

ha soluzioni in $[0, \pi]$.

Soluzione. Consideriamo la funzione ausiliaria $F : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = xe^x - \sin x - 2x^2 e^x (x - \pi) - 1 \,.$$

Poiché $[0, \pi]$ è un intervallo chiuso e limitato, $F \in C^0([0, \pi])$ ed $F(0)F(\pi) < 0$, essendo $F(0) = -1 < 0$ e $F(\pi) = \pi e^\pi - 1 > 0$, per il teorema degli zeri esiste $\alpha \in (0, \pi)$ tale che $F(\alpha) = 0$.

2. • Studiare la funzione

$$f(x) = 3 - \arctan \frac{x^2}{x-1}$$

senza lo studio della derivata seconda e tracciare il grafico.

• Calcolare poi la derivata seconda e scrivere il polinomio di MacLaurin di grado due.

Riportare in tabella i risultati e sul retro del foglio tracciare il grafico e riportare i calcoli.

Dominio di $f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Intersezioni del grafico di f con l'asse y : $f(0) = 3$

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3 - \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 + \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 3 - \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 3 + \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + \dfrac{x^4}{(x-1)^2}} \, \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x - x^2}{x^4 + (x-1)^2}$$

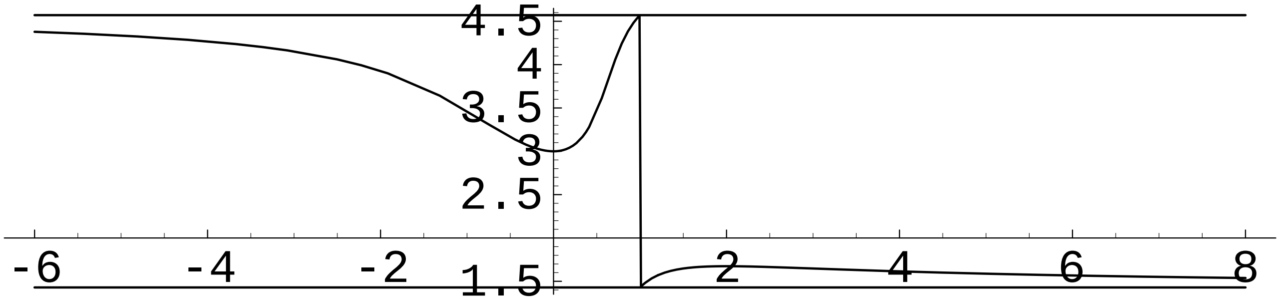
Dominio di $f' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Segno di f': $f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - x^2 \geq 0.$

Punti di massimo e minimo locali: $x = 0$ minimo, $x = 2$ massimo

$$f''(x) = 2\frac{x^5 - 3x^4 - x + 1}{[(x-1)^2 + x^4]^2}, \qquad f(0) = 3, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2.$$

Polinomio di MacLaurin: $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 3 + x^2.$


4.5
4
3.5
3
2.5
1.5
-6
-4
-2
2
4
6
8

3. Determinare l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo

$$f(x) = 3\sqrt{x}(e^x - 1)\sin x^3, \quad \text{per} \;\; x \to 0^+$$

rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = \sin x$.

Soluzione. Bisogna trovare $\alpha \in \mathbb{R}^+$ in modo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)^\alpha} = K \qquad \text{con} \quad K \neq 0\,,\; K < \infty\,.$$

Poiché $e^x - 1 \sim x\,,\;\; \sin x \sim x\,,\;\; \sin x^3 \sim x^3$ per $x \to 0^+$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\,\sqrt{x}(e^x-1)\sin x^3}{(\sin x)^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^{1/2}\cdot x \cdot x^3}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x^{\alpha - 9/2}} = 3$$

se e solo se $\alpha = 9/2$. Pertanto la parte principale di $f(x)$ è $3(\sin x)^{9/2}$ e l'ordine è $\alpha = 9/2$.

4. Risolvere la seguente equazione:

$$(|z|^2 + |z| - 6)(z^3 - i) = 0, \quad \text{dove} \;\; z = x + \mathrm{i}y\,, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

e disegnare le soluzioni nel piano di Gauss.

Soluzione. Per la legge di annullamento del prodotto si ha

$$|z|^2 + |z| - 6 = 0 \qquad \text{e} \qquad z^3 - i = 0.$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado in $|z|$ si ha

$$|z| = 2 \quad e \quad |z| = -3.$$

Solo $|z| = 2$ è accettabile e rappresenta tutti i punti della circonferenza di centro zero e raggio uguale a 2. Risolvendo $z^3 - i = 0$ si ha

$$z_k = \cos\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} \qquad k = 0, 1, 2,$$

ossia

$$z_0 = \frac{i + \sqrt{3}}{2}\,, \qquad z_1 = \frac{i - \sqrt{3}}{2}\,, \qquad z_2 = -i\,.$$

5. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	T.	Totale

Analisi e Geometria 1 **COMPITO B**	**Docenti:** **F. Colombo, G. Mola, E. Munarini**	**11/11/2008** **Ing. Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi: Es.1 = 6 punti, Es.2 = 12 punti, Es.3 = 6 punti, Es.4 = 6 punti.
Punteggio minimo per superare la prova: 18 punti.
Tempo: due ore.

1. Utilizzando il teorema degli zeri stabilire se la seguente equazione

$$x^3e^{2x} - \sin x = 2x^2e^x(x-\pi) + 2$$

ha soluzioni in $[0, \pi]$.

2.
- Studiare la funzione
$$f(x) = -3 + \arctan \frac{x^2}{x-1}$$
senza lo studio della derivata seconda e tracciare il grafico.
- Calcolare poi la derivata seconda e scrivere il polinomio di MacLaurin di grado due.

Riportare in tabella i risultati e sul retro del foglio tracciare il grafico e riportare i calcoli.

Dominio di f=
Intersezioni del grafico di f con l'asse y :
Limiti agli estremi del dominio:
$f'(x)$ =
Dominio di f'=
Segno di f':
Punti di massimo e minimo locali:
$f''(x)$ =
Polinomio di MacLaurin:

3. Determinare l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo

$$f(x) = 5\sqrt{x}(e^x - 1)\sin x^5, \quad \text{per} \quad x \to 0^+$$

rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = \sin x$.

4. Risolvere la seguente equazione:

$$(|z|^2 + 2|z| - 15)(z^3 + 1) = 0, \quad \text{dove} \quad z = x + \mathrm{i}y\,, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

e disegnare le soluzioni nel piano di Gauss.

5. Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.