Analisi e Geometria 1
Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Docenti: P. Antonietti, F. Cipriani, F. Colombo, F. Lastaria
G. Mola, E. Munarini, P. Terenzi, C. Visigalli
Terzo appello, 1° Settembre 2009
Compito A

Cognome: ______________________ **Nome:** ______________________
Matricola: ______________________

1. Verificare la convergenza dell'integrale improprio
$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x$$
e calcolarlo.

2. Data l'equazione differenziale
$$y'(t) = 2t\left(1 + y(t)^2\right)$$
   (a) determinare l'integrale generale.
   (b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = 1$.
   (c) In questo caso, specificare l'intervallo massimale di definizione della soluzione.

3. Sia γ la curva di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \sqrt{2}\cos t \\ z = \sqrt{2}\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$
Calcolare la massa totale di γ rispetto alla densità lineare di massa
$$\delta(x,y,z) = \sqrt{x}.$$

4. Studiare la funzione f definita da
$$f(x) = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x} - 1}\,.$$
(Dominio di f, eventuali simmetrie, limiti agli estremi del dominio, asintoti, f', dominio di f' e classificazione dei punti di non derivabilità di f, punti di massimo e minimo, segno di f'', zeri di f'' e punti di flesso, grafico di f.)

Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**	**Es. 5**	**Totale**
7 punti	7 punti	4 punti	12 punti	3 punti	

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

Soluzione compito A

1. Poiché la funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-2}}$ è positiva sull'intervallo di integrazione $(2, +\infty)$, è possibile utilizzare il criterio del confronto asintotico. Poiché

$$f(x) \sim \frac{2}{(x-2)^{1/2}} \qquad \text{per} \quad x \to 2^+ \qquad (\alpha = 1/2 < 1)$$

e

$$f(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} \qquad \text{per} \quad x \to +\infty \qquad (\alpha = 3/2 > 1)$$

si ha che f è integrabile in senso improprio su $(2, +\infty)$.

Per calcolare l'integrale, basta porre $t = \sqrt{x-2}$. Allora $x = 2 + t^2$, $\mathrm{d}t = 2t\mathrm{d}t$ e

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{2t}{t(2+t^2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(t/\sqrt{2})^2}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{2}\ \arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^{+\infty} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \sqrt{2}\ \arctan\frac{t}{\sqrt{2}} - \lim_{t\to 2^+} \sqrt{2}\ \arctan\frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

2. (a) L'equazione data è a variabili separabili. Non ci sono soluzioni particolari (poiché $1 + y^2 = 0$ non ha soluzioni). Separando le variabili e integrando, si ha

$$\int \frac{y'(t)}{1+y(t)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int t\ \mathrm{d}t$$

ossia $\arctan y(t) = t^2 + c$, da cui si ricava $y(t) = \tan(t^2 + c)$, dove c è una costante reale arbitraria e t varia in un intervallo che dipende dalla condizione iniziale.

(b) Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$, si ha $\tan c = 1$, ossia $c = \frac{\pi}{4}$. Pertanto la soluzione è $y(t) = \tan(t^2 + \frac{\pi}{4})$.

(c) La soluzione trovata esiste per $t^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, ossia per $t^2 - \frac{\pi}{4} < 0$, ossia per $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$. Quindi l'intervallo su cui è definita la soluzione è $I = \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

3. Posto $f(t) = (t^2, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$, si ha $f'(t) = (2t, -\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t)$ e $||f'(t)|| = \sqrt{2+4t^2}$. Quindi la massa totale è

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \delta(f(t))||f'(t)||\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+4t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} 8t\sqrt{2+4t^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{24}\left[\left(2+4t^2\right)^{3/2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\left(2+16\pi^2\right)^{3/2} - 2^{3/2}}{24} = \frac{\left(1+8\pi^2\right)^{3/2} - 1}{6\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

4. (a) Dominio di f: la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(b) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

(c) Asintoti: la retta di equazione $y = -1$ è un asintoto orizzontale. Non esistono asintoti obliqui.

(d) Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \, \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^{2/3}} \, .$$

(e) Dominio di f' e classificazione dei punti di non derivabilità: il dominio di f' è dato da $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f non è derivabile nel punto $x = 0$ poiché $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, e il punto $x = 0$ è un flesso a tangente verticale.

(f) Segno di f': $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

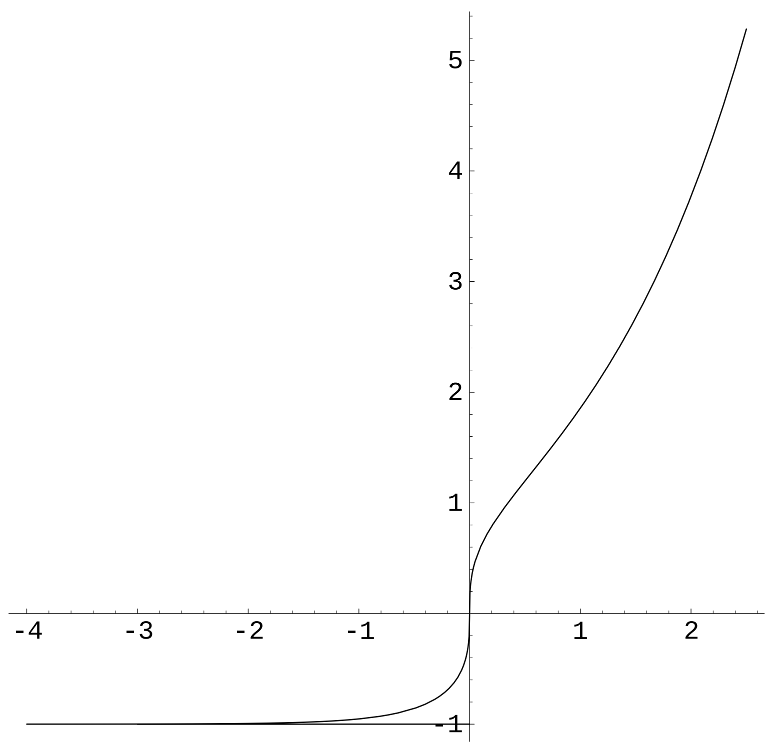
(g) Punti di massimo e minimo: f non ha punti di massimo né di minimo.

(h) Derivata seconda: per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha

$$f''(x) = \frac{4}{9} \, \frac{(e^{2x} - 3)e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^{5/3}} \, .$$

(i) Segno di f'' e punti di flesso: si ha $f''(x) = 0$ per $x = \ln \sqrt{3}$ e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (\ln \sqrt{3}, +\infty)$. Quindi il punto $x = \ln \sqrt{3}$ è un punto di flesso.

(j) Grafico di f:



Analisi e Geometria 1
Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Docenti: P. Antonietti, F. Cipriani, F. Colombo, F. Lastaria
G. Mola, E. Munarini, P. Terenzi, C. Visigalli
Terzo appello, 1° Settembre 2009
Compito B

Cognome: ________________ **Nome:** ________________
Matricola: ________________

1. Verificare la convergenza dell'integrale improprio
$$I = \int_5^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-5}}\,\mathrm{d}x$$
e calcolarlo.

2. Data l'equazione differenziale
$$y'(t) = y(t)^2 + 1.$$
   (a) determinare l'integrale generale.
   (b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = -1$.
   (c) In questo caso, specificare l'intervallo massimale di definizione della soluzione.

3. Sia γ la curva di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2\cos t \\ z = 2\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]\,.$$
Calcolare la massa totale di γ rispetto alla densità lineare di massa
$$\delta(x, y, z) = \sqrt{x}.$$

4. Studiare la funzione f definita da
$$f(x) = \sqrt[5]{\mathrm{e}^{4x} - 1}\,.$$
(Dominio di f, eventuali simmetrie, limiti agli estremi del dominio, asintoti, f', dominio di f' e classificazione dei punti di non derivabilità di f, punti di massimo e minimo, segno di f'', zeri di f'' e punti di flesso, grafico di f.)

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale
7 punti	7 punti	4 punti	12 punti	3 punti	

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

Soluzione compito B

1. Poiché la funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-5}}$ è positiva sull'intervallo di integrazione $(5, +\infty)$, è possibile utilizzare il criterio del confronto asintotico. Poiché

$$f(x) \sim \frac{5}{(x-5)^{1/2}} \quad \text{per} \quad x \to 2^+ \qquad (\alpha = 1/5 < 1)$$

e

$$f(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{per} \quad x \to +\infty \qquad (\alpha = 3/2 > 1)$$

si ha che f è integrabile in senso improprio su $(5, +\infty)$.

Per calcolare l'integrale, poniamo $t = \sqrt{x-5}$. Allora $x = 5 + t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$ e

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{2t}{t(5+t^2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{5+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{5}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(t/\sqrt{5})^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2\sqrt{5}}{5}\arctan\frac{t}{\sqrt{5}}\right]_0^{+\infty} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\frac{t}{5} - \lim_{t\to 0}\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\frac{t}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

2. (a) L'equazione è a variabili separabili. Non ci sono soluzioni particolari (poiché $1 + y^2 = 0$ non ha soluzioni). Separando le variabili, si ha

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t$$

ossia $\arctan y(t) = t + c$, da cui si ha $y(t) = \tan(t+c)$, dove c è una costante reale arbitraria e t varia in un intervallo che dipende dalla condizione iniziale.

   (b) Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -1$, si ha $\tan c = -1$, ossia $c = -\frac{\pi}{4}$. Di conseguenza la soluzione cercata è $y(t) = \tan\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

   (c) La soluzione trovata è definita per $-\frac{\pi}{2} < t - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, ossia sull'intervallo $I = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right)$.

3. Posto $f(t) = (t^2, 2\cos t, 2\sin t)$, si ha $f'(t) = (2t, -2\sin t, 2\cos t)$ e $||f'(t)|| = 2\sqrt{1+t^2}$. Quindi la massa totale è

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\pi} \delta(f(t))||f'(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} 2t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{2}{3}\left[\left(1+t^2\right)^{3/2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\left(\left(1+\pi^2\right)^{3/2} - 1\right). \end{aligned}$$

4. (a) Dominio di f: la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

   (b) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

   (c) Asintoti: la retta di equazione $y = -1$ è un asintoto orizzontale. Non esistono asintoti obliqui.

(d) Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{4}{5} \frac{e^{4x}}{(e^{4x} - 1)^{4/5}}.$$

(e) Dominio di f' e classificazione dei punti di non derivabilità: il dominio di f' è dato da $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f non è derivabile nel punto $x = 0$ in quanto $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, e il punto $x = 0$ è un flesso a tangente verticale.

(f) Segno di f': $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(g) Punti di massimo e minimo: f non ha punti di massimo né di minimo.

(h) Derivata seconda: per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha

$$f''(x) = \frac{16}{25} \frac{(e^{4x} - 5)e^{4x}}{(e^{4x} - 1)^{9/5}}.$$

(i) Segno di f'' e punti di flesso: si ha $f''(x) = 0$ per $x = \ln \sqrt[4]{5}$ e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (\ln \sqrt[4]{5}, +\infty)$. Quindi il punto $x = \ln \sqrt[4]{5}$ è un punto di flesso.

(j) Grafico di f: