Analisi e Geometria 1
Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Docenti: P. Antonietti, F. Cipriani, F. Colombo, F. Lastaria
G. Mola, E. Munarini, P. Terenzi, C. Visigalli
Secondo appello, 13 Luglio 2009
Compito A

Cognome: ______________________ **Nome:** ______________________
Matricola: ______________________

1. Dati i punti $P \equiv (0,0,1)$ e $Q \equiv (1,2,4)$, determinare
   (a) le equazioni parametriche della retta passante per P e per Q,
   (b) l'equazione del piano passante per Q e ortogonale alla retta PQ.
2. Studiare la funzione f definita da
$$f(x) = x^2 - 2\arctan x^2 .$$
(Dominio di f, eventuali simmetrie, limiti agli estremi del dominio, asintoti, f', dominio di f', segno di f', punti di massimo e minimo, segno di f'', zeri di f'' e punti di flesso, grafico di f.)
3. Data la curva γ di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^2 + \sin(t^2 - 1) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$
determinare l'equazione del piano osculatore π nel punto relativo a $t = 1$.
4. Calcolare l'integrale indefinito
$$I = \int \frac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^{x/2} + \mathbf{e}^{x/3}}\, \mathrm{d}x .$$
5. Dimostrare il teorema della permanenza del segno.

Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**	**Es. 5**	**Totale**
6 punti	12 punti	6 punti	6 punti	3 punti	

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

1. Svolgere in dettaglio sia gli esercizi sia le dimostrazioni dei teoremi.
2. Chi si ritira prima della fine dello scritto deve consegnare la scheda e la brutta copia.
3. Durante la prova scritta è consentito tenere soltanto le penne.
4. È vietato comunicare durante la prova scritta.
5. Ci si deve presentare alla prova scritta muniti di un documento d'identità.
6. La prova verrà annullata a chiunque contravverrà alle regole stabilite sopra.

Soluzione compito A

1. I parametri direttori della retta r_{PQ} sono: $a = 1-0 = 1$, $b = 2-0 = 2$, $c = 4-1 = 3$. Quindi
$$r_{PQ} : \begin{cases} x = x_Q + at = 1 + t \\ y = y_Q + bt = 2 + 2t \\ z = z_Q + ct = 4 + 3t \,. \end{cases}$$
Il piano cercato ha equazione $a(x - x_Q) + b(y - y_Q) + c(z - z_Q) = 0$, ossia π : $1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-4) = 0$.

2. (a) Dominio di f: $\mathbb{R}$.
   (b) Simmetrie: f è pari (simmetrica rispetto all'asse y).
   (c) Limiti agli estremi del dominio:
   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \,.$$
   (d) Asintoti: non esistono, poiché $f \sim x^2$ per $x \to \pm\infty$.
   (e) Derivata prima:
   $$f'(x) = 2x \, \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1} \,.$$
   (f) Segno di f': $f'(x) \geq 0$ se e solo se $-1 \leq x \leq 0$ e $x \geq 1$.
   (g) Punti di massimo e minimo: $x_{min} = -1$ $x_{max} = 0$, $x_{min} = 1$.
   (h) Derivata seconda:
   $$f'' = 2 \, \frac{x^8 + 8x^4 - 1}{(x^4 + 1)^2} \,.$$
   (i) Zeri di f'' e punti di flesso: $x^8 + 8x^4 - 1 = 0$, $x_F = \pm\sqrt[4]{\sqrt{17} - 4}$, compatibili con i max e min.

3. Sia f la funzione vettoriale che descrive la curva γ. Poiché
$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t \\ z' = 2t + 2t\cos(t^2 - 1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 2 \\ z'' = 2 + 2\cos(t^2 - 1) - 4t^2 \sin(t^2 - 1) \,, \end{cases}$$
si ha $f(1) = (1,1,1)$, $f'(1) = (1,2,4)$, $f''(1) = (0,2,4)$. Quindi π : $2y - z - 1 = 0$.

4. Posto $\mathbf{e}^x = t^6$, si ha $\mathbf{e}^x \mathrm{d}x = 6t^5 \mathrm{d}t$. Quindi
$$I = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} \, \mathrm{d}t = 6 \int \left(\frac{t^3 + 1}{t + 1} - \frac{1}{t + 1} \right) \mathrm{d}t = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right) - 6 \ln(t + 1) + c \,,$$
dove $t = \mathbf{e}^{x/6}$ e c è una costante reale arbitraria.

Analisi e Geometria 1
Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Docenti: P. Antonietti, F. Cipriani, F. Colombo, F. Lastaria
G. Mola, E. Munarini, P. Terenzi, C. Visigalli
Secondo appello, 13 Luglio 2009
Compito B

Cognome: ______________________ **Nome:** ______________________
Matricola: ______________________

1. Dati i punti $P \equiv (0,0,1)$ e $Q \equiv (1,2,5)$, determinare
   (a) le equazioni parametriche della retta passante per P e per Q,
   (b) l'equazione del piano passante per Q e ortogonale alla retta PQ.
2. Studiare la funzione f definita da
$$f(x) = 2\arctan x^2 - x^2 .$$
(Dominio di f, eventuali simmetrie, limiti agli estremi del dominio, asintoti, f', dominio di f', segno di f', punti di massimo e minimo, segno di f'', zeri di f'' e punti di flesso, grafico di f.)
3. Data la curva γ di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \\ z = t^2 + \sin(t^2 - 1) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$
determinare l'equazione del piano osculatore π nel punto relativo a $t = 1$.
4. Calcolare l'integrale indefinito
$$I = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{x/3}}\,\mathrm{d}x .$$
5. Dimostrare il teorema di Rolle.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale
6 punti	12 punti	6 punti	6 punti	3 punti	

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

1. Svolgere in dettaglio sia gli esercizi sia le dimostrazioni dei teoremi.
2. Chi si ritira prima della fine dello scritto deve consegnare la scheda e la brutta copia.
3. Durante la prova scritta è consentito tenere soltanto le penne.
4. È vietato comunicare durante la prova scritta.
5. Ci si deve presentare alla prova scritta muniti di un documento d'identità.
6. La prova verrà annullata a chiunque contravverrà alle regole stabilite sopra.

Soluzione compito B

1. I parametri direttori della retta r_{PQ} sono: $a = 1-0 = 1$, $b = 2-0 = 2$, $c = 5-1 = 4$. Quindi
$$r_{PQ} : \begin{cases} x = x_Q + at = 1 + t \\ y = y_Q + bt = 2 + 2t \\ z = z_Q + ct = 4 + 4t\,. \end{cases}$$
Il piano cercato ha equazione $a(x - x_Q) + b(y - y_Q) + c(z - z_Q) = 0$, ossia π : $1(x-1) + 2(y-2) + 4(z-4) = 0$.

2. (a) Dominio di f: $\mathbb{R}$.
   (b) Simmetrie: f è pari (simmetrica rispetto all'asse y.
   (c) Limiti agli estremi del dominio:
   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty\,.$$
   (d) Asintoti: non esistono, poiché $f \sim -x^2$ per $x \to \pm\infty$.
   (e) Derivata prima
   $$f'(x) = -2x\,\frac{x^4-1}{x^4+1}\,.$$
   (f) Segno di f': $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq -1$ e $0 \leq x \leq 1$.
   (g) Punti di massimo e minimo: $x_{max} = -1,$, $x_{min} = 0$, $x_{max} = 1$.
   (h) Derivata seconda:
   $$f'' = -2\,\frac{x^8 + 8x^4 - 1}{(x^4+1)^2}\,.$$
   (i) Zeri di f'' e punti di flesso: $x^8 + 8x^4 - 1 = 0$, $x_F = \pm\sqrt[4]{\sqrt{17} - 4}$, compatibili con i max e min.

3. Sia f la funzione vettoriale che descrive la curva γ. Poiché
$$\begin{cases} x' = 2t \\ y' = 1 \\ z' = 2t + 2t\cos(t^2-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = 2 \\ y'' = 0 \\ z'' = 2 + 2\cos(t^2-1) - 4t^2\sin(t^2-1) \end{cases}$$
da cui si ha $f(1) = (1,1,1)$, $f'(1) = (2,1,4)$, $f''(1) = (2,0,4)$. Quindi π : $2x - z - 1 = 0$.

4. Posto $\mathbf{e}^x = t^6$, si ha $\mathbf{e}^x \mathrm{d}x = 6t^5 \mathrm{d}t$. Quindi
$$I = \int \frac{6t^5}{t^3 - t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int\left(\frac{t^3-1}{t-1} + \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = 6\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t\right) + 6\ln|t-1| + c,$$
dove $t = \mathbf{e}^{x/6}$ e c è una costante reale arbitraria.