Analisi e Geometria 1
Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Primo appello, 9 Febbraio 2009
Compito A

Cognome: ______________________ **Nome:** ______________________
Matricola: ______________________

1. Risolvere nel campo complesso l'equazione
$$z - 1 - 6\mathrm{i} = z^2 - 2z\,\mathrm{Re}\,z + |z|^2\,.$$

2. Studiare, al variare del parametro intero $n \in \mathbb{N}$, la convergenza dell'integrale
$$I_n = \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^n}}\,\mathrm{d}x\,.$$
Calcolare I_n per il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ per cui tale integrale converge.

3. Calcolare l'integrale curvilineo
$$I = \int_\gamma f\,\mathrm{d}s$$
dove f è la funzione definita da
$$f(x,y,z) = \frac{x^2(1+8y)}{\sqrt{1+y+4x^2y}}$$
e γ è la curva di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \log t \end{cases} \qquad t \in [1,2]\,.$$

4. Studiare la funzione f definita da
$$f(x) = 1 - \mathbf{e}^{-|x|} + \frac{x}{\mathbf{e}}\,.$$
(Dominio di f, limiti agli estremi del dominio, asintoti, f', dominio di f' e classificazione dei punti di non derivabilità, segno di f', punti di massimo e minimo, segno di f'', grafico di f.)

5. Enunciare e dimostrare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**	**Es. 5**	**Totale**
4 punti	7 punti	7 punti	12 punti	3 punti	

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

Soluzione compito A

1. Posto $z = a + \mathrm{i}b$, l'equazione data si riduce a

$$a + \mathrm{i}b - 1 - 6\mathrm{i} = a^2 + 2\mathrm{i}ab - b^2 - 2(a + \mathrm{i}b)a + a^2 + b^2\,,$$

ossia $a - 1 + \mathrm{i}(b - 6) = 0$. Pertanto deve essere $a - 1 = 0$ e $b - 6 = 0$, e l'equazione data ha solo la soluzione $z = 1 + 6\mathrm{i}$.

2. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e per $x \to +\infty$ si ha

$$f(x) \sim \frac{x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}}\,.$$

Pertanto l'integrale converge per $n - 1 > 1$, ossia per $n > 2$. Poiché il più piccolo valore di n per cui si ha la convergenza è $n = 3$, si ha

$$I_3 = \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} 2x(x^2+3)^{-3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{\sqrt{x^2+3}}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{7}}\,.$$

3. Usando la parametrizzazione di γ, si ha

$$I = \int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_1^2 f(x(t), y(t), z(t))\,\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Poiché $f(x(t), y(t), z(t)) = \dfrac{t^2(1+8t^2)}{\sqrt{1+t^2+4t^4}}$ e $(x'(t), y'(t), z'(t)) = (1, 2t, 1/t)$, si ha

$$I = \int_1^2 \frac{t^2(1+8t^2)}{\sqrt{1+t^2+4t^4}}\,\frac{\sqrt{1+t^2+4t^4}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 (t + 8t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{63}{2}\,.$$

4. (a) Dominio di f : $\mathbb{R}$.

(b) Limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

(c) Asintoti: poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{\mathbf{e}^{-|x|}}{x} + \frac{1}{\mathbf{e}}\right) = \frac{1}{\mathbf{e}}\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - \frac{x}{\mathbf{e}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \mathbf{e}^{-|x|}\right) = 1,$$

la retta di equazione $y = x/\mathbf{e} + 1$ è un asintoto obliquo (destro e sinistro). Poiché $f(x) \le x/\mathbf{e} + 1$, si ha che il grafico di f giace completamente sotto l'asintoto.

(d) $f'(x) = \mathrm{sign}(x)\mathbf{e}^{-|x|} + 1/\mathbf{e}$.

(e) Dominio di f' e classificazione dei punti di non derivabilità: la funzione è derivabile ovunque tranne che in $x = 0$. Inoltre, essendo

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(-\mathbf{e}^x + \frac{1}{\mathbf{e}}\right) = \frac{1}{\mathbf{e}} - 1 \ne \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\mathbf{e}^{-x} + \frac{1}{\mathbf{e}}\right) = \frac{1}{\mathbf{e}} + 1,$$

in corrispondenza di $x = 0$ si ha un punto angoloso.

(f) Segno di f': per $x > 0$, $f'(x) > 0$. Per $x < 0$, $f'(x) > 0$ se $\mathbf{e}^x < \mathbf{e}^{-1}$, ossia se $x < -1$. Quindi f è crescente sugli intervalli $(-\infty, -1]$ e $[0, +\infty)$ ed è decrescente sull'intervallo $[-1, 0]$.

(g) Punti di massimo e minimo: in corrispondenza di $x = -1$ si ha un punto di massimo locale $M \equiv (-1, 1 - 2/\mathbf{e})$, mentre in corrispondenza di $x = 0$ si ha un punto di minimo locale $m \equiv (0, 0)$.

(h) $f''(x) = -\mathbf{e}^{-x}$ per $x > 0$ e $f''(x) = -\mathbf{e}^x$ per $x < 0$.

(i) Segno di f'': poiché $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f è concava.

(j) Per il grafico vedere l'ultima pagina.

Analisi e Geometria 1
Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Primo appello, 9 Febbraio 2009
Compito B

Cognome: ______________________ **Nome:** ______________________
Matricola: ______________________

1. Risolvere nel campo complesso l'equazione
$$z - 1 - 3\mathrm{i} = z^2 - 2z\,\mathrm{Re}\,z + |z|^2\,.$$

2. Studiare, al variare del parametro intero $n \in \mathbb{N}$, la convergenza dell'integrale
$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{(x^3+4)^n}}\,\mathrm{d}x\,.$$
Calcolare I_n per il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ per cui tale integrale converge.

3. Calcolare l'integrale curvilineo
$$I = \int_\gamma f\;\mathrm{d}s$$
dove f è la funzione definita da
$$f(x,y,z) = \frac{1}{4}\,\frac{(1+8x)y^2}{\sqrt{1+x+4xy^2}}$$
e γ è la curva di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \\ z = \log t \end{cases} \qquad t \in [1,3]\,.$$

4. Studiare la funzione f definita da
$$f(x) = 1 + \mathbf{e}^{-|x|} + \frac{x}{\mathbf{e}}\,.$$
(Dominio di f, limiti agli estremi del dominio, asintoti, f', dominio di f' e classificazione dei punti di non derivabilità, segno di f', punti di massimo e minimo, segno di f'', grafico di f.)

5. Enunciare e dimostrare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

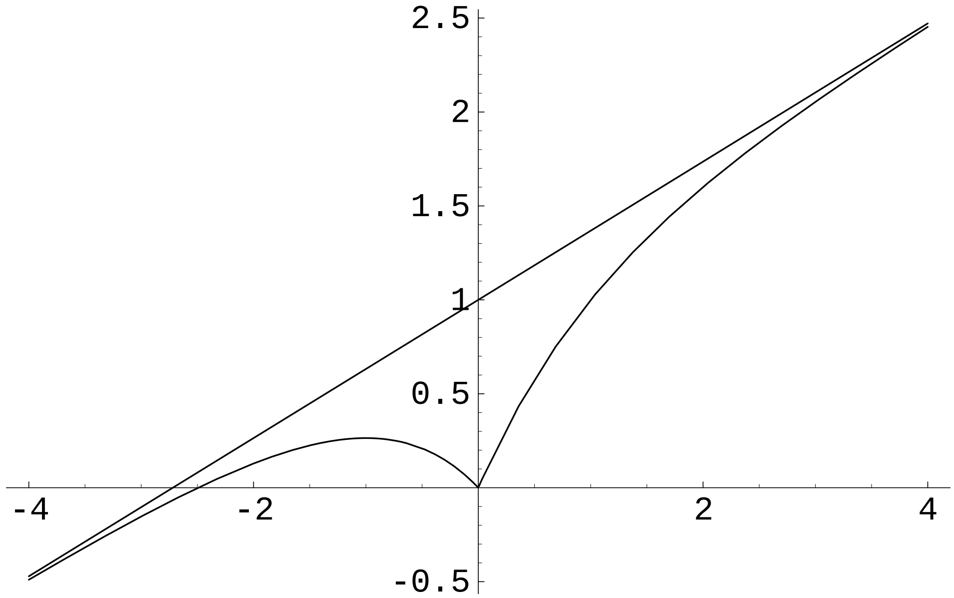
Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**	**Es. 5**	**Totale**
4 punti	7 punti	7 punti	12 punti	3 punti	

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

Risultati compito B

1. $z = 1 + 3\mathrm{i}$.
2. L'integrale converge per $3n/2 - 2 > 1$, ossia per $n > 2$. Inoltre $I_3 = 2/\sqrt{5}$.
3. $I = 41$.
4. Grafici delle due funzioni:

   Compito A:



   Compito B: