Teoria	Es. 1	Es. 2	Totale

Analisi e Geometria 1 **Seconda Prova** **16 Gennaio 2020** **Compito G**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

Domande di teoria (6 punti)

(A) Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vettori in $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{b}$ non nullo. Scrivere (senza dimostrarla) la formula che dà il vettore $\mathbf{P_b}(\mathbf{a})$, *vettore proiezione ortogonale* di $\mathbf{a}$ lungo $\mathbf{b}$. Scrivere esplicitamente le componenti del vettore $\mathbf{P_b}(\mathbf{a})$, dove $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$.

$\mathbf{P_b}(\mathbf{a}) =$	$\mathbf{P_b}(\mathbf{a}) = (\quad , \quad , \quad)$

(Risposta: $\mathbf{P}_{\mathbf{e}_3}(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, a_3)$.)

(B) Enunciare e dimostrare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*. (Scrivere qui sotto e, se necessario, sul retro del foglio).

Esercizi

(Esercizio 1: 10=2+4+4 punti; Esercizio 2: 14 punti)

1. (a) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \dfrac{2t}{t^2-1} y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

specificando il più grande intervallo sul quale la soluzione è definita.

Intervallo massimale sul quale la soluzione del problema di Cauchy è definita: (R1)

Soluzione del problema di Cauchy: (R2)

(b) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(t^2-1)^a}\, dt$$

esiste finito.

Valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale esiste finito: (R3)

Motivazioni delle risposte (R1), (R2), (R3) e conti

(R1) *Intervallo massimale sul quale la soluzione del problema di Cauchy è definita*: $(1, +\infty)$
L'equazione differenziale associata al problema di Cauchy è un'equazione lineare del primo ordine dove il coefficiente $p(t) = -\dfrac{2t}{t^2-1}$ è continuo su $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ e il coefficiente $q(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ è continuo su $(-\infty,+\infty)$. L'intervallo più ampio contenente $t_0 = 2$ in cui entrambi i coefficienti sono continui è $(1,+\infty)$. Pertanto il più ampio intervallo su cui la soluzione del problema di Cauchy è definita è $(1,+\infty)$.

(R2) Si noti che in $(1,+\infty)$ si ha $|t^2-1| = t^2-1$. Allora l'integrale generale dell'equazione differenziale è data da:

$$\begin{aligned} y = f(t) &= e^{\int \frac{2t}{t^2-1}dt} \left\{ c + \int \frac{t^2-1}{1+t^2} e^{-\int \frac{2t}{t^2-1}dt} dt \right\} \\ &= e^{\log(t^2-1)} \left\{ c + \int \frac{1-t^2}{1+t^2} e^{-\log(t^2-1)} dt \right\} \\ &= (t^2-1) \left\{ c + \int \frac{1-t^2}{1+t^2} \frac{1}{t^2-1} dt \right\} \\ &= (t^2-1) \left\{ c - \int \frac{1}{1+t^2} dt \right\} \\ &= (t^2-1)(c - \arctan t)\ , \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene $c = \arctan 2$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy cercata è

$$y = (t^2-1)(\arctan 2 - \arctan t).$$

(R3) Basta studiare l'integrabilità in un intorno di $+\infty$. Se $t \to +\infty$, vale la equivalenza asintotica:

$$\frac{1}{(t^2-1)^a} \sim \frac{1}{t^{(2a)}} \qquad t \to +\infty \tag{2}$$

Pertanto, dal criterio del confronto asintotico segue che l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(t^2-1)^a} dt$$

converge se e solo se $2a > 1$, ossia $a > 1/2$.

2. (a) Sia $[0, \sqrt{2}] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata

$$C(t) = \left(\frac{1}{2}\sin(2t), \cos^2(t), t^2\right) \qquad t \in [0, \sqrt{2}]$$

- Calcolare i vettori $C'(t)$ e $C''(t)$, $t \in [0, \sqrt{2}]$. Stabilire se $C''(0)$ (l'accelerazione calcolata in $t = 0$) è ortogonale alla velocità $C'(0)$.

(R4) $C'(t) =$ | (R5) $C''(t) =$

$C''(0)$ è ortogonale a $C'(0)$? (R6)

- Trovare $\kappa(0)$, cioè la curvatura in $t = 0$. (*Suggerimento*: Si può utilizzare la formula generale della curvatura; oppure la decomposizione $C''(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N}$.)

(R7) $\kappa(0) =$

- Calcolare l'*elemento di lunghezza* $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$ della curva C e l'integrale di linea

$$\int_C \sqrt{z}\, ds$$

(R8) $\int_C \sqrt{z}\, ds =$

(b) In $\mathbb{R}^3$, consideriamo il piano $\mathcal{P}$ di equazione $x - 3y + 2z - 3 = 0$ e il punto $A = (0, 0, 2)$. Trovare:

- Equazioni parametriche per la retta r contenente il punto A e ortogonale al piano $\mathcal{P}$.

(R9)

- Un'equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}'$ passante per il punto A e parallelo al piano $\mathcal{P}$.

(R10)

Motivazioni delle risposte (tranne (R4) e (R5)) e conti

(R4) $C'(t) = (\cos(2t), -\sin(2t), 2t)$.

(R5) $C''(t) = (-2\sin(2t), -2\cos(2t), 2)$

(R6) $C'(0) = (1, 0, 0)$, $C''(0) = (0, -2, 2)$. $C'(0) \cdot C''(0) = 0$. Quindi $C'(0)$ e $C''(0)$ sono ortogonali.

(R7) $v = v(t) = |C'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$.

$dv/dt = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$. In $t = 0$, $v = v(0) = 1$ e $dv/dt = 0$. Quindi, in $t = 0$,

$$C''(0) = (0, -2, 2) = 0\mathbf{T} + (1)^2\kappa\mathbf{N} = \kappa\mathbf{N}$$

Quindi, $|C''(0)| = \sqrt{8} = \kappa$

(R8) $ds = |C'(t)|\, dt = \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$. Per $t \in [0, \sqrt{2}]$, si ha $\sqrt{z} = \sqrt{t^2} = t$. Quindi:

$$\int_C \sqrt{z}\, ds = \int_0^{\sqrt{2}} = \int_0^{\sqrt{2}} t\sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \frac{1}{12}\left[(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}.$$

(R9) Equazioni parametriche di r:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -3t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

(R10) Equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}'$: $\quad x - 3y + 2z - 4 = 0$