Teoria	Es. 1	Es. 2	Totale

Analisi e Geometria 1 **Prima Prova** **5 Novembre 2019** **Compito G**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

Domande di teoria (8 punti)

(A) Siano D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione. Scrivere la definizione di: f *strettamente decrescente.*

(B) Dimostrare il seguente teorema: *Sia* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione,* $I \subset \mathbb{R}$*. Se* f *è derivabile, per ogni* $x \in I$ *si ha* $f'(x) < 0$ *e* I *è un intervallo, allora* f *è strettamente decrescente.*

(C) Mostrare, con un controesempio, che nel precedente teorema (B) l'ipotesi che il dominio I di f sia un *intervallo* di $\mathbb{R}$ non si può eliminare.

Risposta. Si tratta di dimostrare che l'enunciato: *"Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione,* $D \subset \mathbb{R}$*. Se* f *è derivabile e per ogni* $x \in I$ *si ha* $f'(x) < 0$*, allora* f *è strettamente decrescente su* D*."* è *FALSO.*

Un controesempio è dato dalla funzione $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Infatti: (i) $f'(x) = -1/x^2 < 0$ per ogni x nel dominio; (ii) f non è strettamente decrescente. (Infatti, ad esempio, $-1 < 1$, ma $f(-1) < f(1)$, in contrasto con la definizione di funzione strettamente decrescente.

Esercizi

(Esercizio 1: 6 punti; Esercizio 2: 16 punti)

1. (a) Calcolare e scrivere nella forma algebrica $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ il numero complesso

$$w = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{36}$$

Forma algebrica di w : $\boxed{}$

(b) Determinare l'insieme S delle soluzioni complesse dell'equazione

$$(1 + 2i)\, z + (1 - i)\, \overline{z} + 2 - 3\sqrt{3} + i = 0$$

Insieme S delle soluzioni: $\boxed{}$

Motivazioni delle risposte dell'esercizio 1

(a) Da

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

segue

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{36} = e^{i\frac{36\pi}{4}} = e^{i9\pi} = \boxed{\text{-1}}$$

(b) Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$x + iy + 2ix - 2y + x - iy - ix - y + 2 + 3\sqrt{3} + i = 0$$

ossia

$$(2x - 3y + 2 + 3\sqrt{3}) + i(x + 1) = 0$$

ossia

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2 - 3\sqrt{3} = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $x = -1$ e $y = -\sqrt{3}$.

Pertanto, l'insieme delle soluzioni è costituito dall'unico punto $\boxed{z = -1 - i\sqrt{3}}$:

$$S = \{-1 - i\sqrt{3}\}$$

2. Si consideri la funzione (con dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$) definita nel modo seguente:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1 - 4\,e^x}{1 + e^x}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

(a) Trovare tutti gli asintoti di f. (Specificare: a $+\infty, -\infty$, orizzontali, obliqui eccetera)

Asintoti:

(b) Scrivere l'espressione (opportunamente semplificata) della derivata prima di f.

Derivata $f'(x)$:

(c) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (0, f(0))$.

Equazione della retta tangente:

(d) La funzione f, definita da (1), è limitata?

(e) La funzione f, definita da (1), è invertibile?

(f) Quante sono le soluzioni in $\mathbb{R}$ dell'equazione $f(x) = -1$? *Numero delle soluzioni*:

(g) Tracciare un grafico qualitativo (ma sufficientemente chiaro) di f.

Grafico qualitativo di f:

(h) Calcolare il limite: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{3x^4}\left(e^{x^2} - 1 - x^2\right)$ *Valore del limite*:

Motivazioni delle risposte dell'esercizio 2

Motivare le risposte ai quesiti (a), (b), (c), ..., (h) qui sotto e sul retro di questo foglio (o sulla facciata di fianco). Riportare i conti in modo conciso, spiegare con richiami a teoremi e considerazioni teoriche.

(a) $x = 0$ asintoto a $-\infty$; $\quad x = 3$ asintoto a $+\infty$.

(b) $f'(x) = \dfrac{-5e^x}{(1+e^x)^2}$

(c) $y + \dfrac{3}{2} = -\dfrac{5}{4}x$, ossia $5x + 4y + 6 = 0$.

(d) La funzione f è strettamente decrescente (perché la derivata è negativa su $\mathbb{R}$). Poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -4$, si ha $\sup(f) = 1$ e $\inf(f) = -4$. Quindi f è limitata.

(Anche se non esplicitamente richiesto, determiniamo l'immagine $\mathrm{Im}\,(f)$. Per il *Teorema dei Valori Intermedi*, $\mathrm{Im}\,(f)$ deve essere un intervallo J di $\mathbb{R}$. Abbiamo già visto che $\sup J = 1$ e $\inf J = -4$. Poiché f non assume il valore 1 e non assume il valore -4, si ha $\mathrm{Im}\,(f) = (-4, 1)$).

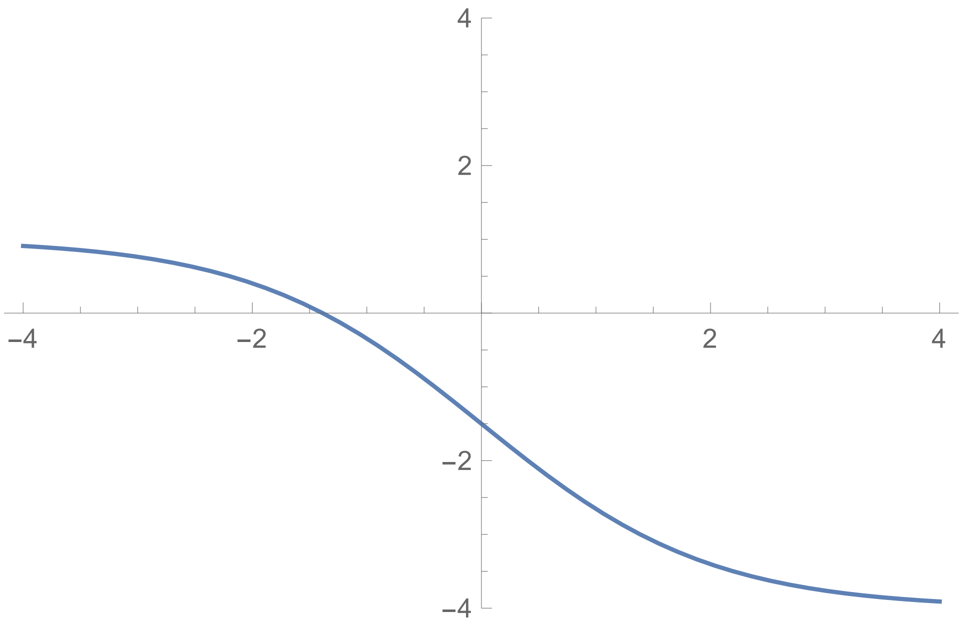
(e) La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ non è invertibile perché non è suriettiva. Infatti, poiché $\sup J = 1$ e $\inf J = -4$, l'immagine di f non coincide con il suo codominio $\mathbb{R}$. (In breve, f non è invertibile, perché $\mathrm{Im}\,(f) = (-4, 1)$ non coincide con il codominio $\mathbb{R}$) .

(f)

- Dal fatto che f è strettamente monotòna, segue che f è iniettiva. Quindi, l'equazione $f(x) = -1$ ha *al piú una* soluzione.
- Il valore -1 appartiene a $\mathrm{Im}\,(f) = (-4, 1)$; dunque l'equazione $f(x) = -1$ possiede in $\mathbb{R}$ *almeno una* soluzione.

Mettendo insieme questi due fatti, possiamo concludere che l'equazione $f(x) = -1$ ha in $\mathbb{R}$ *una e una sola* soluzione.

(g)



(h) Usiamo lo sviluppo di Taylor di e^t (centrato in 0):

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2), \qquad (t \to 0)$$

Allora $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)$, per $x \to 0$. Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{3x^4}\left(e^{x^2} - 1 - x^2\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3x^4}\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4) - 1 - x^2\right) = 1/6$$