

Teoria	Es. 1	Es. 2	Totale
Analisi e Geometria 1 Prima Prova 5 Novembre 2019 Compito F	Docente:		Numero di iscrizione all'appello:
Cognome:	Nome:		Matricola:

Istruzioni: Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

Domande di teoria (8 punti)

(A) Siano D un sottoinsieme di \mathbb{R} e $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione. Scrivere la definizione di: f strettamente crescente.

(B) Dimostrare il seguente teorema: Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione, $I \subset \mathbb{R}$. Se f è derivabile, per ogni $x \in I$ si ha $f'(x) > 0$ e I è un intervallo, allora f è strettamente crescente.

(C) Mostrare, con un controesempio, che nel precedente teorema (B) l'ipotesi che il dominio I di f sia un intervallo di \mathbb{R} non si può eliminare.

Risposta. Si tratta di dimostrare che l'enunciato: "Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione, $D \subset \mathbb{R}$. Se f è derivabile e per ogni $x \in I$ si ha $f'(x) > 0$, allora f è strettamente crescente su D ." è FALSO.

Un controesempio è dato dalla funzione $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = -1/x$. Infatti: (i) $f'(x) = 1/x^2 > 0$ per ogni x nel dominio; (ii) f non è strettamente crescente. (Infatti, ad esempio, $-1 < 1$, ma $f(-1) > f(1)$, in contrasto con la definizione di funzione strettamente crescente.

Esercizi

(Esercizio 1: 6 punti; Esercizio 2: 16 punti)

1. (a) Calcolare e scrivere nella forma algebrica $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) il numero complesso

$$w = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{48}$$

Forma algebrica di w :

- (b) Determinare l'insieme S delle soluzioni complesse dell'equazione

$$(1 + 2i)z + (1 - i)\bar{z} + 2 + 3\sqrt{3} + i = 0$$

Insieme S delle soluzioni:

Motivazioni delle risposte dell'esercizio 1

- (a) Da

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

segue

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{48} = e^{i\frac{3 \times 48\pi}{4}} = e^{i36\pi} = \boxed{1}$$

- (b) Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$x + iy + 2ix - 2y + x - iy - ix - y + 2 + 3\sqrt{3} + i = 0$$

ossia

$$(2x - 3y + 2 + 3\sqrt{3}) + i(x + 1) = 0$$

ossia

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2 + 3\sqrt{3} = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $x = -1$ e $y = \sqrt{3}$.

Pertanto, l'insieme delle soluzioni è costituito dall'unico punto $\boxed{z = -1 + i\sqrt{3}}$:

$$S = \{-1 + i\sqrt{3}\}$$

2. Si consideri la funzione (con dominio \mathbb{R} e codominio \mathbb{R}) definita nel modo seguente:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1 + 3e^x}{1 + e^x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

(a) Trovare tutti gli asintoti di f . (Specificare: a $+\infty$, $-\infty$, orizzontali, obliqui eccetera)

Asintoti:

(b) Scrivere l'espressione (opportunamente semplificata) della derivata prima di f .

Derivata $f'(x)$:

(c) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (0, f(0))$.

Equazione della retta tangente:

(d) La funzione f , definita da (1), è limitata?

(e) La funzione f , definita da (1), è invertibile?

(f) Quante sono le soluzioni in \mathbb{R} dell'equazione $f(x) = 5/2$? Numero delle soluzioni:

(g) Tracciare un grafico qualitativo (ma sufficientemente chiaro) di f .

Grafico qualitativo di f :

(h) Calcolare il limite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} (-1 - x^2 + e^{x^2})$ Valore del limite:

Motivazioni delle risposte dell'esercizio 2

Motivare le risposte ai quesiti (a), (b), (c), ..., (h) qui sotto e sul retro di questo foglio (o sulla facciata di fianco). Riportare i conti in modo conciso, spiegare con richiami a teoremi e considerazioni teoriche.

(a) $x = 0$ asintoto a $-\infty$; $x = 3$ asintoto a $+\infty$.

(b) $f'(x) = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$

(c) $y - 2 = \frac{1}{2}x$, ossia $x - 2y + 4 = 0$.

(d) La funzione f è strettamente crescente (perché la derivata è positiva su \mathbb{R}). Poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, si ha $\sup(f) = 3$ e $\inf(f) = 1$. Quindi f è limitata.

(Anche se non esplicitamente richiesto, determiniamo l'immagine $\text{Im}(f)$. Per il *Teorema dei Valori Intermedi*, $\text{Im}(f)$ deve essere un intervallo J di \mathbb{R} . Abbiamo già visto che $\sup J = 3$ e $\inf J = 1$. Poiché f non assume il valore 1 e non assume il valore 3, si ha $\text{Im}(f) = (1, 3)$).

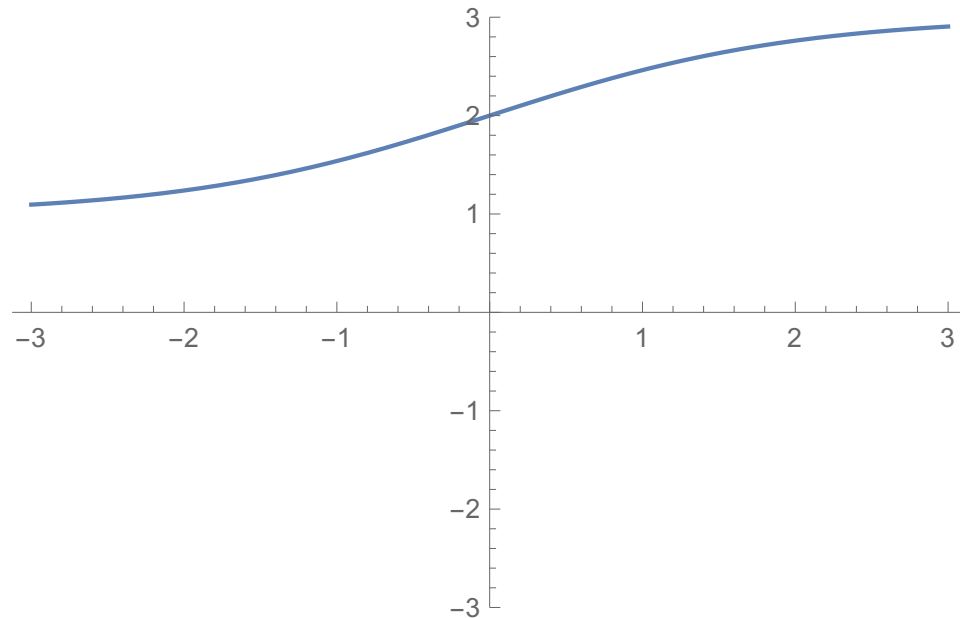
(e) La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ non è invertibile perché non è suriettiva. Infatti, poiché $\sup J = 3$ e $\inf J = 1$, l'immagine di f non coincide con il suo codominio \mathbb{R} . (In breve, f non è invertibile, perché $\text{Im}(f) = (1, 3)$ non coincide con il codominio \mathbb{R}).

(f)

- Dal fatto che f è strettamente monotona, segue che f è iniettiva. Quindi, l'equazione $f(x) = 5/2$ ha *al più una* soluzione.
- Il valore $5/2$ appartiene a $\text{Im}(f) = (1, 3)$; dunque l'equazione $f(x) = 5/2$ possiede in \mathbb{R} *almeno una* soluzione.

Mettendo insieme questi due fatti, possiamo concludere che l'equazione $f(x) = 5/2$ ha in \mathbb{R} *una e una sola* soluzione.

(g)



(h) Usiamo lo sviluppo di Taylor di e^t (centrato in 0):

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2), \quad (t \rightarrow 0)$$

Allora $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)$, per $x \rightarrow 0$. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left(-1 - x^2 + e^{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left(-1 - x^2 + 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4) \right) = 1/2$$