T.(a)	T.(b)	Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Primo Appello. Versione F.** **3 Febbraio 2020**	**Docente:**	**Numero di iscrizione:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

Prima parte

(*Scrivere su questa facciata e sul retro del foglio*)

T.(a) (3 punti) Dimostrare che, nello spazio euclideo orientato tridimensionale $\mathbb{R}^3$, il valore del prodotto misto $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ è il volume (orientato) del parallelepipedo determinato dalla terna ordinata di vettori $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

T.(b) (3 punti) Enunciare e dimostrare il *Teorema della Media Integrale* per funzioni *continue* su un intervallo compatto $[a, b]$.

Seconda parte.

Esercizio 1 (6 punti)

(a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$y' = (2x - 2)e^{-y}$$

Soluzione generale: (R1) $\boxed{}$

(b) Trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (2x-2)e^{-y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Soluzione del problema di Cauchy: (R2) $\boxed{}$

Motivazioni delle risposte (R1), (R2)

(R1) Equazione a variabili separabili: $e^y\,dy = (2x-2)\,dx$. Integrando:

$$e^y = x^2 - 2x + c, \qquad\qquad c \in \mathbb{R}$$

Soluzione generale: $y = \ln(x^2 - 2x + c)$ $\qquad c \in \mathbb{R}$.

(R2) La soluzione $\tilde{y}$ del problema di Cauchy deve soddisfare: $0 = \tilde{y}(1) = \ln(1 - 2 + c)$. Quindi $c = 2$ e

$$\tilde{y}(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$$

Esercizio 2 (6 punti)

(a) Scrivere nella forma esponenziale (ossia, nella forma $r\,e^{i\vartheta}$) tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$z^4 = (\sqrt{3}+i)^4$$

Soluzioni dell'equazione: : (R3) $\boxed{}$

(b) Definiamo

$$\mathbb{C} \xrightarrow{T} \mathbb{C}, \quad T(z) = iz + 2$$

Trovare l'insieme dei punti fissi $Fix(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid T(z) = z\}$ e dire di quale tipo di trasformazione si tratta.

$Fix(T)$ e tipo di trasformazione: : (R4) $\boxed{}$

Motivazioni delle risposte (R3), (R4), e conti

(R3) L'equazione si scrive:

$$z^4 = \left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right]^4$$

Di qui segue subito che una radice è $z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, ossia $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Se scegliamo l'argomento ϑ nell'intervallo $[0, 2\pi)$, le quattro radici si scrivono in forma esponenziale come

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \qquad z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, \qquad z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}, \qquad z_3 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

(R4) La trasformazione T è una isometria che preserva l'orientazione (perché è del tipo $F(z) = uz + w$, con $|u| = 1$). L'isometria T ha un unico punto fisso: $z_0 = 1 + i$. Le isometrie del piano che hanno un unico punto fisso sono le rotazioni (diverse dall'identità). Dunque T è la rotazione di centro $z_0 = 1 + i$ e angolo $\pi/2$ (rotazione di $\pi/2$ in senso 'anti-orario').

Esercizio 3 (4 punti) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si considerino le rette r_1, r_2:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad r_2 : \begin{cases} x = 4s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + 5s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

(i) Scrivere equazioni parametriche per la retta r_3 che passa per il punto $A = (1, 2, 3)$ ed è ortogonale sia a r_1 sia a r_2.

Equazioni parametriche di r_3: (R5)

(ii) Trovare un'equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}$ che include r_1 ed è parallelo a r_2.

Equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}$: (R6)

Motivazioni delle risposte (R5), (R6), e conti

(R5) Vettori di direzione di r_1 e r_2 sono rispettivamente $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 5)$. Un vettore ortogonale a entrambi è il prodotto vettoriale

$$(1, 2, -1) \times (4, 1, 5) = (11, -9, -7)$$

Equazioni parametriche della retta r_3 sono allora:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 11t \\ y = 2 - 9t \\ z = 3 - 7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(R6) Un vettore di giacitura del piano $\mathcal{P}$ che include r_1 ed è parallelo a r_2 è

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (1, 2, -1) \times (4, 1, 5) = (11, -9, -7)$$

Poiché $\mathcal{P}$ deve passare, ad esempio, per il punto $(2, 0, 1) \in r_1$, una sua equazione cartesiana è

$$11(x - 2) - 9(y - 0) - 7(z - 1) = 0$$

ossia

$$11x - 9y - 7z - 15 = 0$$

Esercizio 4 (8 punti)

(a) Poniamo

$$f(t) = \frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}}, \qquad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Stabilire se f è integrabile in senso generalizzato in un intorno di 0.

La funzione f è integrabile in senso generalizzato in un intorno di 0? (R7)

(b) Definiamo

$$G(x) = \int_1^x \frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}}\, dt$$

Scrivere la derivata $G'(x)$ e stabilire se $x_0 = 1$ è, per G, un punto di minimo locale, di massimo locale, oppure né di minimo, né di massimo.

(R8) $G'(x)$: *Il punto $x_0 = 1$ è:*

(c) La funzione G ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$? (R9)

(d) Disegnare un grafico qualitativo della funzione G ristretta all'intervallo $[1, +\infty]$.

(R10)

Motivazioni delle risposte (R7), (R8), (R9), e conti.

(R7) Per $t \to 0$,

$$(t^2-1) \sim -1, \qquad \arctan t \sim t, \qquad e^t - 1 \sim t$$

Quindi

$$f(t) = \frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}} \sim \frac{(-1)t}{t^{5/3}} = -\frac{1}{t^{2/3}}, \qquad t \to 0$$

Per il criterio del confronto asintotico, f è integrabile in senso generalizzato in un intorno di 0.

(R8) Per il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*,

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}}\, dt = \frac{(x^2-1)\arctan x}{\sqrt[3]{(e^x-1)^5}}$$

Dunque la derivata $G'(x)$ si annulla in $x_0 = 1$. Inoltre, vicino a $x_0 = 1$, la funzione $G'(x)$ ha lo stesso segno di $x^2 - 1$ (Quindi, vicino a $x_0 = 1$, si ha: $G'(x) < 0$ se $x < 1$; $G'(x) > 0$ se $x > 1$). Pertanto, $x_0 = 1$ è un punto di minimo locale per $G(x)$.

(R9) Per *definizione* di asintoto orizzontale,

$$\boxed{G(x) = \int_1^x \frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}}\,dt \quad \textit{ha asintoto orizzontale per } x \to +\infty}$$

se, e solo se,

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R}: \quad \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}}\,dt = K}$$

Quest'ultima condizione *equivale*, per la definizione stessa di integrale generalizzato a $+\infty$, alla condizione

$$\boxed{\textit{esiste finito l'integrale } \int_1^{+\infty} \frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}}\,dt}$$

ovvero

$$\boxed{\frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}} \textit{ è integrabile in senso generalizzato in un intorno di } +\infty}$$

In definitiva:
Chiedersi se $G(x) = \int_1^x \frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}}\,dt$ *abbia o meno un asintoto orizzontale per* $x \to +\infty$*, equivale a chiedersi se*

$$f(t) = \frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}}$$

sia integrabile a $+\infty$*.*
Per stabilire se $f(t)$ sia integrabile a $+\infty$ si può usare il criterio del confronto, o del confronto asintotico. (*Attenzione*: Non basta dire che $f(t)$ tende a 0 per $t \to +\infty$. Per esempio, $f(t) = 1/t$ tende a 0 a $+\infty$, ma l'integrale $\int_1^{+\infty}(1/t)\,dt$ non è finito).
Ora, per $t \to +\infty$

$$\frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}} \sim \frac{t^2(\pi/2)}{e^{\frac{5}{3}t}} < \frac{\pi}{2}\frac{1}{t^2}$$

Infatti: poiché $\frac{t^4}{e^{\frac{5}{3}t}} \to 0$ per $t \to +\infty$, si ha definitivamente $\frac{t^4}{e^{\frac{5}{3}t}} < 1$, e quindi $\frac{t^2(\pi/2)}{e^{\frac{5}{3}t}} < \frac{\pi}{2}\frac{1}{t^2}$.
Dunque, per il criterio del confronto asintotico e per il criterio del confronto, l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}}\,dt$$

esiste finito, ovvero (in modo equivalente) la funzione $G(x) = \int_1^x \frac{(t^2-1)\arctan t}{\sqrt[3]{(e^t-1)^5}}\,dt$ ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

(R10) Grafico qualitativo di $G(x)$: