Teoria	Es. 1	Es. 2	Totale

Analisi e Geometria 1 Seconda Prova. Compito G. 14 Gennaio 2019.	Docente:	Numero di iscrizione all'appello:
Cognome:	Nome:	Matricola:

Istruzioni: Tutte le risposte devono essere motivate: *si deve illustrare il procedimento seguito e si devono riportare, in modo succinto, i conti effettuati. Le risposte* **devono essere riportate nelle caselle**. *Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli (fronte e retro): i fogli di brutta non si consegnano.*

Questioni di teoria (6 punti)

(Scrivere le risposte su questo foglio e sul retro.)

(T1). Scrivere una definizione di *curvatura* di una curva (nello spazio) in un suo punto. (Si chiede una *definizione*; non la formula che fornisce la curvatura in una parametrizzazione arbitraria.)

(T2). Enunciare e dimostrare il *Teorema della Media Integrale.*

$\boxed{\textbf{Esercizio 1}}$ (12 punti)

(A) Si consideri l'equazione:

$$y' - \frac{1}{x-4}\,y = 0 \tag{1}$$

sull'intervallo $I = (4, +\infty)$.

Domanda $(A)_1$. Trovare la soluzione generale, sull'intervallo $I = (4, +\infty)$, dell'equazione (1).

(B) Sia $\tilde{y}$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{1}{x-4}\,y = x-4 \\ y(5) = 5 \end{cases} \tag{2}$$

sull'intervallo $I = (4, +\infty)$.

Domanda $(B)_1$. Calcolare i valori $\tilde{y}'(5)$ e $\tilde{y}''(5)$. (Non è necessario trovare prima la soluzione $\tilde{y}(x)$; si può utilizzare direttamente il sistema (2).)

Domanda $(B)_2$. Trovare la soluzione $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ del problema di Cauchy (2), definita su $(4, +\infty)$.

Domanda $(B)_3$. Controllare, facendo i conti, che la soluzione del problema di Cauchy che è stata trovata, soddisfa entrambe le condizioni del sistema (2).

$\boxed{\textbf{Risposte}}$

Risposta $(A)_1$. Soluzione generale dell'equazione (1):

Risposta $(B)_1$.

$\tilde{y}'(5) =$	$\tilde{y}''(5) =$

Risposta $(B)_2$. Soluzione del problema di Cauchy (2):

$\tilde{y}(x) =$

Risposta $(B)_3$. Controllo, mediante conto diretto, che la soluzione del problema di Cauchy che si è trovata (Risposta $(B)_2$), soddisfa entrambe le condizioni del sistema (2):

Esercizio 2 (12 punti)

Si consideri la curva parametrizzata in $\mathbb{R}^3$:

$$C : \begin{cases} x = t + \cos^2 t \\ y = t + \sin^2 t \\ z = \sqrt{2} \sin t \cos t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Calcolare:

(a) il vettore velocità istantanea $C'(t)$ e la sua lunghezza, cioè la velocità scalare $|C'(t)|(= v(t))$, per tutti i $t \in \mathbb{R}$;

(b) il vettore accelerazione istantanea $C''(t)$, per tutti i $t \in \mathbb{R}$;

(c) la lunghezza dell'arco di curva C_0 che si ottiene restringendo la curva C all'intervallo $I = [0, 4\pi]$; cioè, calcolare l'integrale di linea $\displaystyle\int_{C_0} ds$.

(d) la curvatura di C in $t_0 = 0$. (*Suggerimento*: Può essere utile ricordare la decomposizione dell'accelerazione: $C'' = \dfrac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N}$.)

Risposte

Risposta (a):	$C'(t) =$ $\qquad\qquad$ $\vert C'(t)\vert =$
Risposta (b):	$C''(t) =$
Risposta (c):	Lunghezza dell'arco di curva da $t = 0$ a $t = 4\pi$:
Risposta (d):	Curvatura $\kappa(0) =$

Soluzioni

Esercizio 1

Risposta $(A)_1$. $\boxed{y(x) = C(x-4) \qquad C \in \mathbb{R}}$

L'equazione $y' - \dfrac{1}{x-4}\,y = 0$ è lineare omogenea (e anche separabile). Posto $a(x) = -\dfrac{1}{x-4}$, una primitiva di $a(x)$ sull'intervallo $(4, +\infty)$ è $A(x) = -\ln(x-4)$. Quindi la soluzione generale sull'intervallo $I = (4, +\infty)$ è $y(x) = Ce^{-A(x)} = Ce^{\ln(x-4)} = C(x-4)$, dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

Risposta $(B)_1$. Chiamiamo $\tilde{y}$ la soluzione del problema di Cauchy. Dal sistema (2) si ricava:

$\tilde{y}'(x) = \dfrac{1}{x-4}\tilde{y} + x - 4$. Per $x = 5$, poiché $\tilde{y}(5) = 5$, si ha : $\tilde{y}'(5) = \tilde{y}(5) + 5 - 4 = 5 + 5 - 4 = 6$.

La derivata seconda è $\tilde{y}''(x) = \dfrac{\tilde{y}'(x-4) - \tilde{y}}{(x-4)^2} + 1$. Quindi, $\tilde{y}''(5) = \tilde{y}'(5)(5-4) - \tilde{y}(5) + 1 = 6 - 5 + 1 = 2$

Quindi:

$$\boxed{\tilde{y}'(5) = 6 \qquad\qquad \tilde{y}''(5) = 2}$$

Risposta $(B)_2$. La soluzione generale di $y' - \dfrac{1}{x-4}\,y = x - 4$ è

$$C(x-4) + x(x-4), \qquad C \in \mathbb{R}$$

Il valore iniziale $y(5) = 5$ impone $C = 0$. Quindi, la soluzione del problema di Cauchy (2) è:

$$\boxed{\tilde{y}(x) = x(x-4)}$$

Risposta $(B)_3$. Si vede subito che $\tilde{y}(x) = x(x-4)$ soddisfa la condizione iniziale $y(5) = 5$. Infatti:

$$\tilde{y}(5) = 5(5-4) = 5$$

Verifichiamo ora, con un conto diretto, che $\tilde{y}(x) = x(x-4)$ soddisfa l'equazione $y' - \dfrac{1}{x-4}\,y = x - 4$. Poiché $\tilde{y}'(x) = \dfrac{d}{dx}\,x(x-4) = 2x - 4$, sostituendo $\tilde{y}$ nel primo membro $y' - \dfrac{1}{x-4}\,y$ si ottiene:

$$\tilde{y}'(x) - \frac{1}{x-4}\tilde{y} = 2x - 4 - \frac{1}{x-4}x(x-4) = x - 4$$

Quindi $\tilde{y}$ soddisfa l'equazione $y' - \dfrac{1}{x-4}\,y = x - 4$.

$\boxed{\textbf{Esercizio 2. Soluzioni.}}$

N.B. Per semplificare i conti nei punti (a) e (b) si ricordino le formule di trigonometria:

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t \qquad\qquad \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

(oltre a $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$).

Risposta (a): $\boxed{C'(t) = (1 - \sin 2t, 1 + \sin 2t, \sqrt{2}\cos 2t) \qquad v(t) = |C'(t)| = \sqrt{2 + 2\sin^2 2t + 2\cos^2 2t} = 2}$

Risposta (b): $\boxed{C''(t) = (-2\cos 2t, 2\cos 2t, -2\sqrt{2}\sin 2t)}$

Risposta (c): $\boxed{\text{Lunghezza dell'arco di curva da } t = 0 \text{ a } t = 4\pi\text{:} \qquad \int_0^{4\pi} |C'(t)|\,dt = \int_0^{4\pi} 2\,dt = 8\pi}$

Risposta (d): $\boxed{C''(0) = (-2, 2, 0) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2 k\mathbf{N} = 4k\mathbf{N}. \qquad \sqrt{8} = |C''(0)| = 4\kappa. \qquad \text{Quindi } \kappa(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

La risposta (d) si ottiene anche per mezzo della formula

$$\kappa(0) = \frac{|C'(0) \times C''(0)|}{|C'(0)|^3} = \frac{|(1, 1, \sqrt{2}) \times (-2, 2, 0)|}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$