

Teoria	Es. 1	Es. 2	Totale
Analisi e Geometria 1 Seconda Prova. Compito F. 14 Gennaio 2019.	Docente:		Numero di iscrizione all'appello:
Cognome:	Nome:		Matricola:

Istruzioni: Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. Le risposte devono essere riportate nelle caselle. I fogli di brutta non si consegnano.

Questioni di teoria (6 punti)

(Scrivere le risposte su questo foglio e sul retro.)

(T1). Scrivere una definizione di *curvatura* di una curva (nello spazio) in un suo punto. (Si chiede una *definizione*; non la formula che fornisce la curvatura in una parametrizzazione arbitraria.)

(T2). Enunciare e dimostrare il *Teorema della Media Integrale*.

Esercizio 1 (12 punti)

(A) Si consideri l'equazione:

$$y' - \frac{1}{x-3} y = 0 \quad (1)$$

sull'intervallo $I = (3, +\infty)$.

Domanda (A)₁. Trovare la soluzione generale, sull'intervallo $I = (3, +\infty)$, dell'equazione (1).

(B) Sia \tilde{y} la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{x-3} y = x - 3 \\ y(4) = 4 \end{cases} \quad (2)$$

sull'intervallo $I = (3, +\infty)$.

Domanda (B)₁. Calcolare i valori $\tilde{y}'(4)$ e $\tilde{y}''(4)$. (Non è necessario trovare prima la soluzione $\tilde{y}(x)$; si può utilizzare direttamente il sistema (2).)

Domanda (B)₂. Trovare la soluzione $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ del problema di Cauchy (2), definita su $(3, +\infty)$.

Domanda (B)₃. Controllare, facendo i conti, che la soluzione del problema di Cauchy che è stata trovata, soddisfa entrambe le condizioni del sistema (2).

Risposte

Risposta (A)₁. Soluzione generale dell'equazione (1):

Risposta (B)₁. $\tilde{y}'(4) =$ $\tilde{y}''(4) =$

$\tilde{y}'(4) =$ $\tilde{y}''(4) =$

Risposta (B)₂. Soluzione del problema di Cauchy (2):

$\tilde{y}(x) =$

Risposta (B)₃. Controllo, mediante conto diretto, che la soluzione del problema di Cauchy che si è trovata (*Risposta (B)₂*), soddisfa entrambe le condizioni (2):

Esercizio 2 (12 punti)

Si consideri la curva parametrizzata in \mathbb{R}^3 :

$$C : \begin{cases} x = t + \cos^2 t \\ y = t + \sin^2 t \\ z = \sqrt{2} \sin t \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Calcolare:

(a) il vettore velocità istantanea $C'(t)$ e la sua lunghezza, cioè la velocità scalare $|C'(t)| (= v(t))$, per tutti i $t \in \mathbb{R}$;

(b) il vettore accelerazione istantanea $C''(t)$, per tutti i $t \in \mathbb{R}$;

(c) la lunghezza dell'arco di curva C_0 che si ottiene restringendo la curva C all'intervallo $I = [0, \pi]$; cioè, calcolare l'integrale di linea $\int_{C_0} ds$.

(d) la curvatura di C in $t_0 = 0$. (*Suggerimento*: Può essere utile ricordare la decomposizione dell'accelerazione: $C'' = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v^2 \kappa \mathbf{N}$.)

Risposte

Risposta (a): $C'(t) =$

$|C'(t)| =$

Risposta (b): $C''(t) =$

Risposta (c): Lunghezza dell'arco di curva da $t = 0$ a $t = \pi$:

Risposta (d): Curvatura $\kappa(0) =$

Esercizio 1. Soluzioni.

Risposta (A)₁. $y(x) = C(x - 3) \quad C \in \mathbb{R}$

L'equazione $y' - \frac{1}{x-3}y = 0$ è lineare omogenea (e anche separabile). Posto $a(x) = -\frac{1}{x-3}$, una primitiva di $a(x)$ sull'intervallo $(3, +\infty)$ è $A(x) = -\ln(x-3)$. Quindi la soluzione generale sull'intervallo $I = (3, +\infty)$ è $y(x) = Ce^{-A(x)} = Ce^{\ln(x-3)} = C(x-3)$, dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

Risposta (B)₁. Chiamiamo \tilde{y} la soluzione del problema di Cauchy. Dal sistema (2) si ricava:

$$\tilde{y}'(x) = \frac{1}{x-3}\tilde{y} + x - 3. \text{ Per } x = 4, \text{ poiché } \tilde{y}(4) = 4, \text{ si ha : } \tilde{y}'(4) = \tilde{y}(4) + 4 - 3 = 4 + 4 - 3 = 5.$$

La derivata seconda è $\tilde{y}''(x) = \frac{\tilde{y}'(x-3) - \tilde{y}}{(x-3)^2} + 1$. Quindi, $\tilde{y}''(4) = \tilde{y}'(4)(4-3) - \tilde{y}(4) + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$

Quindi:

$$\tilde{y}'(4) = 5 \qquad \tilde{y}''(4) = 2$$

Risposta (B)₂. La soluzione generale di $y' - \frac{1}{x-3}y = x - 3$ è

$$C(x-3) + x(x-3), \quad C \in \mathbb{R}$$

Il valore iniziale $y(4) = 4$ impone $C = 0$. Quindi, la soluzione del problema di Cauchy (2):

$$\tilde{y}(x) = x(x-3)$$

Risposta (B)₃.

Si vede subito che $\tilde{y}(x) = x(x-3)$ soddisfa la condizione iniziale $y(4) = 4$. Infatti:

$$\tilde{y}(4) = 4(4-3) = 4$$

Verifichiamo ora, con un conto diretto, che $\tilde{y}(x) = x(x-3)$ soddisfa l'equazione $y' - \frac{1}{x-3}y = x - 3$. Poiché $\tilde{y}'(x) = \frac{d}{dx}x(x-3) = 2x - 3$, sostituendo \tilde{y} nel primo membro $y' - \frac{1}{x-3}y$ si ottiene:

$$\tilde{y}'(x) - \frac{1}{x-3}\tilde{y} = 2x - 3 - \frac{1}{x-3}x(x-3) = x - 3$$

Quindi \tilde{y} soddisfa l'equazione $y' - \frac{1}{x-3}y = x - 3$.

Esercizio 2. Soluzioni.

N.B. Per semplificare i conti nei punti (a) e (b) si ricordino le formule di trigonometria:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t \quad \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

(oltre a $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$).

Risposta (a): $C'(t) = (1 - \sin 2t, 1 + \sin 2t, \sqrt{2} \cos 2t) \quad v(t) = |C'(t)| = \sqrt{2 + 2 \sin^2 2t + 2 \cos^2 2t} = 2$

Risposta (b): $C''(t) = (-2 \cos 2t, 2 \cos 2t, -2\sqrt{2} \sin 2t)$

Risposta (c): Lunghezza dell'arco di curva da $t = 0$ a $t = \pi$: $\int_0^\pi |C'(t)| dt = \int_0^\pi 2 dt = 2\pi$

Risposta (d): $C''(0) = (-2, 2, 0) = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v^2 k \mathbf{N} = 4k \mathbf{N}. \quad \sqrt{8} = |C''(0)| = 4\kappa. \quad \text{Quindi } \kappa(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La risposta (d) si ottiene anche per mezzo della formula

$$\kappa(0) = \frac{|C'(0) \times C''(0)|}{|C'(0)|^3} = \frac{|(1, 1, \sqrt{2}) \times (-2, 2, 0)|}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$