T.(a)	T.(b)	Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Primo Appello** **4 Febbraio 2019**	**Docente:**	**Numero di iscrizione:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

Prima parte

T.(a) (3 punti)

(1) Definire una **curva nello spazio $\mathbb{R}^3$ parametrizzata alla lunghezza d'arco**:

(2) Definire la **curvatura** di una curva nello spazio $\mathbb{R}^3$:

T.(b) (3 punti) Dimostrare: *Se* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è derivabile in un punto* x_0*, allora è continua in* x_0.

Seconda parte.

Esercizio 1 (3+3 punti)

(a) Calcolare il valore del limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{3}x^3}{\ln(1+x^3)}$$

Risposta : $\boxed{}$

(b) Scrivere in forma algebrica tutte le radici complesse dell'equazione:

$$z^3 - i = 0$$

Risposta : $\boxed{}$

Soluzioni

(a) Utilizziamo le formule di Taylor–Maclaurin

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4), \qquad \ln(1+t) = t + o(t)$$

per $t \to 0$. Allora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{3}x^3}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{t^3}{3!} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{6}$$

(b) Il modulo di i è 1, e l'argomento principale di i è $\vartheta = \pi/2$. Quindi le tre radici terze complesse di i hanno modulo 1 e argomenti

$$\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

In forma algebrica, le radici terze complesse di i sono dunque:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \qquad -i$$

Esercizio 2 (8 punti) Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \ln(e^x - x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Riportare i risultati nella tabella qui sotto.

Eventuali asintoti:
Derivata prima (formula e dominio):
(Eventuali) Punti di massimo o di minimo locale di f:
Polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine 2 di f **in** $x_0 = 0$:

Soluzioni

Osserviamo anzitutto che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x - x > 0$$

(dimostrarlo, facendo anche uso di un confronto grafico).

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; per $x \to -\infty$ la funzione non ha asintoto.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} [\ln(e^x - x)] - x = 0$$

Dunque $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

(b)

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) La derivata si annulla solo in $x_0 = 0$, che è (l'unico) punto di minimo locale (e globale).

(d) La derivata seconda è $f''(x) = \frac{(-x+2)e^x - 1}{(e^x - x)^2}$. Quindi il polinomio di Taylor–Maclaurin di f di ordine 2 in $x_0 = 0$ è $\frac{x^2}{2}$.

Esercizio 3 (4 punti) L'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2\ln(1+\sqrt{x})}\,dx.$$

è convergente?

Risposta : $\boxed{}$

Motivazioni

Per $x \to 0$,

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \sim \frac{1}{2}, \qquad \ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$$

e dunque

$$\frac{1-\cos x}{x^2\ln(1+\sqrt{x})} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

che, in un intorno destro di $x_0 = 0$, è convergente.

Esercizio 4 (6 punti) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si considerino le seguenti rette r_1, r_2:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad\qquad r_2 : \begin{cases} x + y + 3z - 5 = 0 \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'intersezione delle rette r_1 e r_2.

Risposta :

(ii) Trovare un vettore di direzione $\mathbf{v}_1$ di r_1 e un vettore di direzione $\mathbf{v}_2$ di r_2.

Risposta : $\mathbf{v}_1 =$ $\qquad$ $\mathbf{v}_2 =$

(iii) Trovare un'equazione cartesiana di un piano che contenga la retta r_2 e sia parallelo alla retta r_1.

Risposta :

Soluzioni

(i) Sostituendo, nel sistema che definisce r_2, al posto di x, y, z rispettivamente $2t, 1 - 3t, 2 + t$, si ottiene un sistema di due equazioni nell'incognita t, che ha l'unica soluzione $t = -1$. In corrispondenza di tale valore di t, si ottiene (dalle equazioni di r_1) il punto $P = (-2, 4, 1)$. Dunque, le rette r_1 e r_2 sono incidenti: la loro intersezione è il punto $P = (-2, 4, 1)$.

(ii) Un vettore di direzione di r_1 è $\mathbf{v}_1 = (2, -3, 1)$, le cui componenti sono i coefficienti del parametro t nelle equazioni parametriche di r_1.

Per trovare un vettore di direzione di r_2, basta ricavare equazioni parametriche di r_2. Vediamo nei dettagli come si fa. Partiamo dal sistema delle due quazioni cartesiane che definiscono r_2,

$$r_2 : \begin{cases} x + y + 3z - 5 = 0 \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

Ora, teniamo fissa la prima equazione, e sottraiamo un opportuno multiplo della seconda dalla prima, in modo tale che nella nuova equazione non compaia piú la variabile x (in questo caso, basta sottrarre la seconda equazione dalla prima):

$$r_2 : \begin{cases} x + y + 3z - 5 = 0 \\ \quad 2y + 2z - 10 = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \quad r_2 : \begin{cases} x + y + 3z - 5 = 0 \\ \quad y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

(Con queste operazioni, prendiamo un'altra coppia di piani del fascio di sostegno r_2; la retta rappresentata dalla nuova coppia di equazioni, resta sempre r_2). Ora poniamo $z = u$, e sostituiamo questo valore nella seconda equazione $y + z - 5 = 0$, ottenendo: $y = 5 - u$. Infine, sostituiamo $z = u$ $y = 5 - u$ nella prima equazione $x + y + 3z - 5 = 0$, e otteniamo $x = -2u$. In questo modo, abbiamo trovato per r_2 le equazioni parametriche

$$r_1 : \begin{cases} x = -2u \\ y = 5 - u \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = u \end{cases}$$

dalle quali leggiamo il vettore di direzione $\mathbf{v}_2 = (-2, -1, 1)$ (o un qualunque vettore non nullo multiplo di esso).

(iii)

Prima soluzione. Sappiamo già che r_1 e r_2 sono incidenti, e quindi complanari. Il piano (unico) che le contiene entrambe è il piano cercato, cioè il piano (unico) che contiene r_2 ed è parallelo a r_1. Per trovare questo piano $\mathcal{P}$, basta trovare un suo vettore di giacitura $\mathbf{w}$, che deve essere un vettore ortogonale sia a $\mathbf{v}_1$ sia a $\mathbf{v}_2$. Basterà prendere $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Poiché $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (-2, -4, -8)$, un vettore di giacitura di $\mathcal{P}$ sarà $(1, 2, 4)$. Il piano $\mathcal{P}$ cercato è dunque il piano con giacitura $(1, 2, 4)$, passante per un punto (qualunque) di r_1, per esempio il punto $P = (-2, 4, 1)$.

$$1(x+2) + 2(y-4) + 4(z-1) = 0$$

cioè $x + 2y + 4z - 10 = 0$.

Seconda soluzione. Si consideri il generico piano del fascio di sostegno r_2,

$$\lambda(x + y + 3z - 5) + \mu(x - y + z + 5) = 0,$$

e si determinino λ e μ in modo tale che il piano stesso sia parallelo al vettore di direzione $\mathbf{v}_1 = (2, -3, 1)$ della retta r_1. (Si ricordi che la condizone di parallelismo piano/retta è data dall'annullarsi del prodotto scalare di un vettore di direzione della retta e di un vettore di giacitura del piano. Fare i calcoli.).