Analisi e Geometria 1
Preparazione alla prima prova parziale
Questionario 11 (Ottobre 2021)

Indice

1 Vero o falso?

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false, motivando la risposta.

1. Se $(-1,1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è una funzione pari e derivabile, allora la funzione derivata f' è dispari.

2. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è derivabile (in ogni punto del suo dominio $\mathbb{R}$).

3. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$
è continua in 0.

4. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{2}$$
è derivabile in 0.

5. Poniamo $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^4\cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{3}$$
Allora f è derivabile in $x_0 = 0$.

6. Poniamo $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^4\cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{4}$$
Il $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste.

7. La funzione $f(x) = \log x - \arctan(x-1)$ ha in $x_0 = 1$ un punto di minimo locale.

8. Siano z_1, z_2 numeri complessi non nulli, con $\arg(z_1) = \vartheta_1$ e $\arg(z_2) = \vartheta_2$. Allora:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

(Gli argomenti $\arg(z)$ si considerano definiti a meno di multipli interi di 2π).

9. Siano $r, \alpha \in \mathbb{R}$, r razionale non nullo e α irrazionale. Allora $r\alpha$ è irrazionale.

10. Esiste un numero reale $a > 0$ soddisfacente: Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a < \frac{1}{n}$.

11. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a)f(b) < 0$ e f è strettamente decrescente, allora f ha in $[a, b]$ uno zero, e uno soltanto.

12. Siano D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua con dominio D. Se l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ è un intervallo, allora il dominio D di f è un intervallo.

2 Risposte e brevi commenti

1. Se $(-1,1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è una funzione pari e derivabile, allora la funzione derivata f' è dispari.

   VERO. Poiché f è pari, $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in (-1,1)$. Derivando il primo membro (con la regola della funzione composta) e il secondo membro, otteniamo: $-f'(-x) = f'(x)$, ossia $f'(-x) = -f'(x)$. Dunque f' è dispari.

2. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è derivabile (in ogni punto del suo dominio $\mathbb{R}$).

   VERO. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2|x|$.

3. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{5}$$
   è continua in 0.

   VERO. $\lim_{x\to 0} x\cos(1/x) = 0$, perché prodotto della funzione x, che è infinitesima per $x \to 0$, e della funzione $\cos(1/x)$, che è limitata. (Nei dettagli:
$$0 \leq \left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x|\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \cdot 1 = |x|$$
   Poiché $\lim_{x\to 0}|x| = 0$, anche $\left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \to 0$, per il teorema del confronto.)

4. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{6}$$
   è derivabile in 0.

   FALSO. Ricorriamo alla definizione di funzione derivabile in un punto. Il limite del rapporto incrementale è:
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
   Siccome questo limite non esiste, f non è derivabile in 0.

5. Poniamo $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^4\cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{7}$$
   Allora f è derivabile in $x_0 = 0$.

   VERO. Studiamo il limite del rapporto incrementale di f relativo a $x_0 = 0$:
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^4\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)-0}{x-0} = x^3\cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \to 0 \quad \text{per} \quad x \to 0 \tag{8}$$
   (Perché, per $x \to 0$, $x^3 \to 0$ e $\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$ è limitata.)

6. Poniamo $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Il $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste.

VERO. Per $x \neq 0$,

$$f'(x) = 4x^3 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) - x^4 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)(-3x^{-4}) = 4x^3 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) + 3 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Per $x \to 0$, il termine $4x^3 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$ tende a zero (perché prodotto di $4x^3$ infinitesima e $\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$ limitata) e il termine $3\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ non ha limite. Quindi, per $x \to 0$, $f'(x)$ non ha limite.

OSSERVAZIONE Si noti che, anche se il $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste, la derivata $f'(0)$ esiste. In altri termini, la funzione f è derivabile (su tutto $\mathbb{R}$), ma la derivata f' (anch'essa definita su tutto $\mathbb{R}$) non è continua in 0. Quindi *f è derivabile su $\mathbb{R}$, ma non è di classe $C^1(\mathbb{R})$*. (Si ricordi la definizione: $g \in C^1(I)$ se g è derivabile, con derivata continua su I.). Si veda la Figura 1.

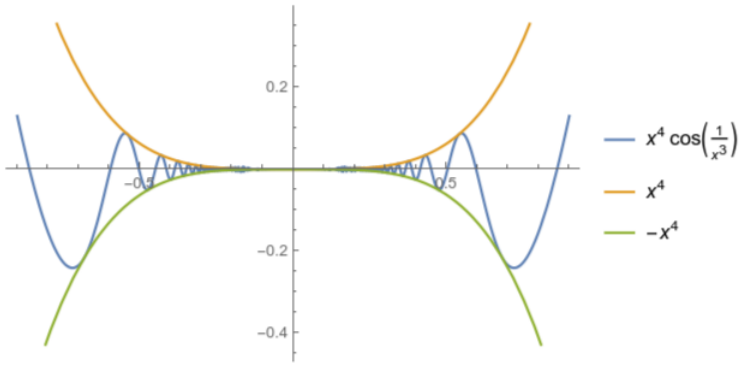

Figura 1: Grafico di $f(x) = x^4 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Il limite di $f'(x)$ per $x \to 0$ non esiste, cioè: *le pendenze delle rette tangenti in $x(\neq 0)$ non convergono ad alcun limite per $x \to 0$*. Comunque, f è derivabile in 0. Infatti: la derivata $f'(0)$ è, per definizione, *il limite della pendenza* $\frac{f(x)-f(0)}{x-x_0}$ *della retta secante che passa per il punto fissato $(0, f(0))$ e un punto vicino sul grafico*. Il nostro esempio mostra che tale limite *può esistere anche se le pendenze $f'(x)$ delle rette tangenti nei punti vicini non convergono ad alcun limite*. Vale però il teorema seguente: *Se una funzione g è continua in x_0, derivabile per $x \neq 0$, e* $\lim_{x\to x_0} g'(x) = \ell$ esiste finito, *allora g è derivabile in x_0 e $g'(x_0) = \ell$*. Infatti, in tal caso, il limite del rapporto delle derivate è: $\lim_{x\to x_0} \frac{D(g(x)-g(0))}{D(x-0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{1} = \lim_{x\to x_0} g'(x) = \ell$, e quindi, per il teorema dell'Hospital, esiste anche il limite del rapporto incrementale $\frac{g(x)-g(0)}{x-x_0}$ (ossia g è derivabile in x_0) e $g'(x_0) = \ell$.

7. La funzione $f(x) = \log x - \arctan(x-1)$ ha in $x_0 = 1$ un punto di minimo locale.

FALSO. $x_0 = 1$ è un punto di massimo locale. Infatti, da $f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x(1+(x-1)^2)}$ leggiamo che $f'(x) > 0$ in un intorno sinistro di $x_0 = 1$, mentre $f'(x) < 0$ in un intorno destro di $x_0 = 1$. In alternativa, poniamo $x = 1 + t$ e sviluppiamo $\log(1+t) - \arctan(t)$ in $t_0 = 0$ come

$$\log(1+t) - \arctan(t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) - (t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Si vede allora che $t = 0$ è un punto di massimo locale per $g(t) = \log(1+t) - \arctan(t)$, e quindi $x_0 = 1$ è un punto di massimo locale per $f(x) = \log x - \arctan(x-1)$.

8. Siano z_1, z_2 numeri complessi non nulli, con $\arg(z_1) = \vartheta_1$ e $\arg(z_2) = \vartheta_2$. Allora:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

(Gli argomenti $\arg(z)$ si considerano definiti a meno di multipli interi di 2π).

Vero. Poniamo: $z_1 = |z_1|\,(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$, $z_2 = |z_2|\,(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$. Il loro prodotto è dato da: $z_1 z_2 = |z_1||z_2|\,(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2))$.

9. Siano $r, \alpha \in \mathbb{R}$, r razionale non nullo e α irrazionale. Allora $r\alpha$ è irrazionale.

Vero. Supponiamo, per assurdo, $r\alpha = q$, con $q \in \mathbb{Q}$. Moltiplicando per r^{-1} (r è invertibile, perché non nullo), otteniamo $\alpha = r^{-1}q$. Assurdo, perché α è irrazionale, mentre $r^{-1}q$ (essendo prodotto di due razionali) è razionale.

10. Esiste un numero reale $a > 0$ soddisfacente: Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a < \frac{1}{n}$.

Falso. Per la Proprietà di Archimede, se $a > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ per il quale $na > 1$ e quindi $a > \frac{1}{n}$.

11. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a)f(b) < 0$ e f è strettamente decrescente, allora f ha in $[a, b]$ uno zero, e uno soltanto.

Vero. Esiste almeno uno zero perché f soddisfa le ipotesi del Teorema degli Zeri. Inoltre, poiché f è strettamente decrescente, è iniettiva e quindi non può avere più di uno zero. (Infatti, se c_1, c_2, con $c_1 \neq c_2$, fossero entrambi zeri di f, si avrebbe $f(c_1) = f(c_2) = 0$, e quindi f non sarebbe iniettiva.)

12. Siano D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua con dominio D. Se l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ è un intervallo, allora il dominio D di f è un intervallo.

Falso. Controesempio: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$. La funzione f è continua, la sua immagine $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$ è un intervallo, ma D non è un intervallo.