Analisi e Geometria 1
Preparazione alla prima prova parziale
Questionario 10 (Ottobre 2021)

Indice

1 Vero o falso?

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false, motivando la risposta.

1. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, esistono infiniti numeri razionali r tali che $a < r < b$.
2. In $\mathbb{R}$, ogni successione strettamente decrescente è convergente.
3. Per $x \to 0$, $\sin(x) = x + o(x^2)$.
4. Per $n \to +\infty$, $\log_e\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$
5. Se $z = (3+4i)^2(1+7i)^2$, allora $|z| = 5 \times \sqrt{50}$.
6. Se $|w| = 1$, allora $w^{-1} = \overline{w}$.
7. In $\mathbb{C}$, l'equazione $|z - 3 + 4i| = 1$ ha infinite soluzioni.
8. La funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^4 \log_e(x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
non è derivabile in 0.
9. La retta $y = x$ è asintoto obliquo del grafico di $f(x) = x + \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$.
10. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte, con $f''(x) > 0$ per ogni x in $\mathbb{R}$. Allora f è strettamente crescente.

2 Risposte e brevi commenti

1. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, esistono infiniti numeri razionali r tali che $a < r < b$.

   VERO. Si tratta di una delle formulazioni della proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

2. In $\mathbb{R}$, ogni successione strettamente decrescente è convergente.

   FALSO. Sia a_n una successione in $\mathbb{R}$ strettamente decrescente. Se a_n è limitata inferiormente, converge all'estremo inferiore della sua immagine. Se non è limitata inferiormente, tende a $-\infty$.

3. Per $x \to 0$, $\sin(x) = x + o(x^2)$.

   VERO. Il polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine 2 di $f(x) = \sin(x)$ in 0 è

   $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x$ (perché $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$.)

4. Per $n \to +\infty$, $\log_e \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

   VERO. Per $t \to 0$, $\log_e (1 + t) \sim t$

5. Se $z = (3 + 4i)^2(1 + 7i)^2$, allora $|z| = 5 \times \sqrt{50}$.

   FALSO. $|z| = |3 + 4i|^2|1 + 7i|^2 = 25 \times 50$.

6. Se $|w| = 1$, allora $w^{-1} = \overline{w}$.

   VERO. $w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{w\,\overline{w}} = \overline{w}$, perché $w\,\overline{w} = |w|^2 = 1$.

7. In $\mathbb{C}$, l'equazione $|z - 3 + 4i| = 1$ ha infinite soluzioni.

   VERO. Le soluzioni sono tutti i punti della circonferenza di centro $C = (3 - 4i)$ e raggio 1.

8. La funzione

   $$f(x) = \begin{cases} x^4 \log_e(x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   non è derivabile in 0.

   FALSO. Studiamo la derivabilità di f in $x_0 = 0$ *usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale*:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 \log_e(x^2) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^3 \log_e(x^2) = 0.$$

   Dunque, f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$.

9. La retta $y = x$ è asintoto obliquo, a $+\infty$, del grafico di $f(x) = x + \sqrt{x}$.

   FALSO. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Quindi, se esiste un asintoto obliquo $y = mx + q$, si deve avere $m = 1$. Ma $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, quindi l'asintoto obliquo non esiste. Si noti che però sussiste l'equivalenza asintotica $x + \sqrt{x} \sim x$, per $x \to +\infty$.

10. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte, con $f''(x) > 0$ per ogni x in $\mathbb{R}$. Allora f è strettamente crescente.

    FALSO. Ad esempio, $f(x) = x^2$ ha derivata seconda $f''(x) = 2 > 0$, ma f non è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. (Se $f'' > 0$, allora f' è strettamente crescente, e quindi f è convessa).