Un risultato fondamentale: la formula di Taylor (locale e globale).

- Quadro generale: studio locale / studio globale.
- Polinomi di Taylor.
- Formula di Taylor (locale) con il resto di Peano.
- Sviluppi di Taylor (locali) notevoli (con resto di Peano).
- Applicazioni: calcolo di limiti, massimi e minimi.
- Formula di Taylor (globale) con il resto di Lagrange.
- Stima dell'errore.

(Versione: 17/10/2022)

Quadro generale: studio locale / studio globale.

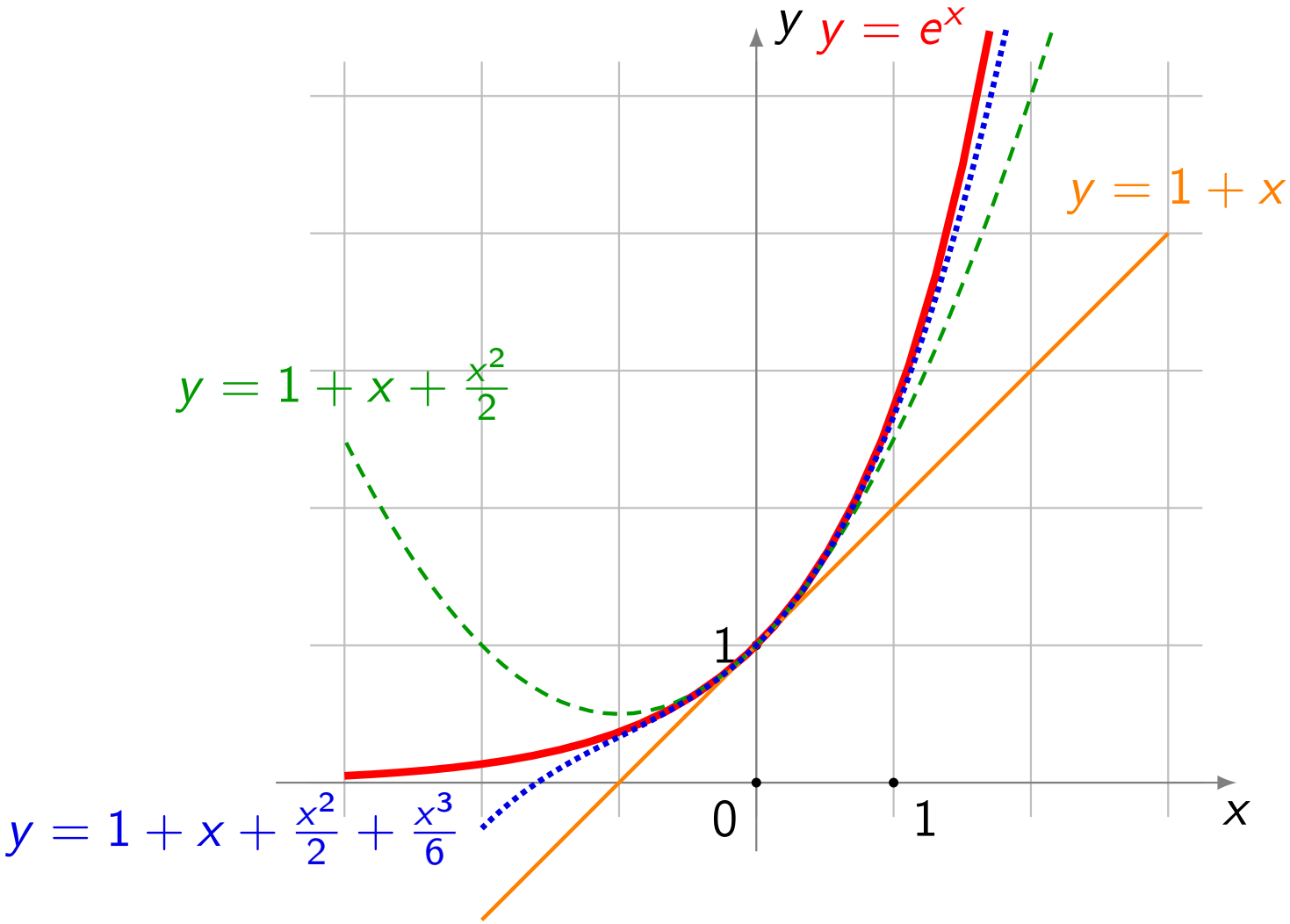
- L'approssimazione lineare vicino a un punto a,
  $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a)) \quad (\text{per } x \to a)$
  si generalizza a una approssimazione polinomiale vicino a un punto a:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + .. + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_{a,n}(x) = \text{Polinomio di Taylor}} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{Resto di Peano}}}$$

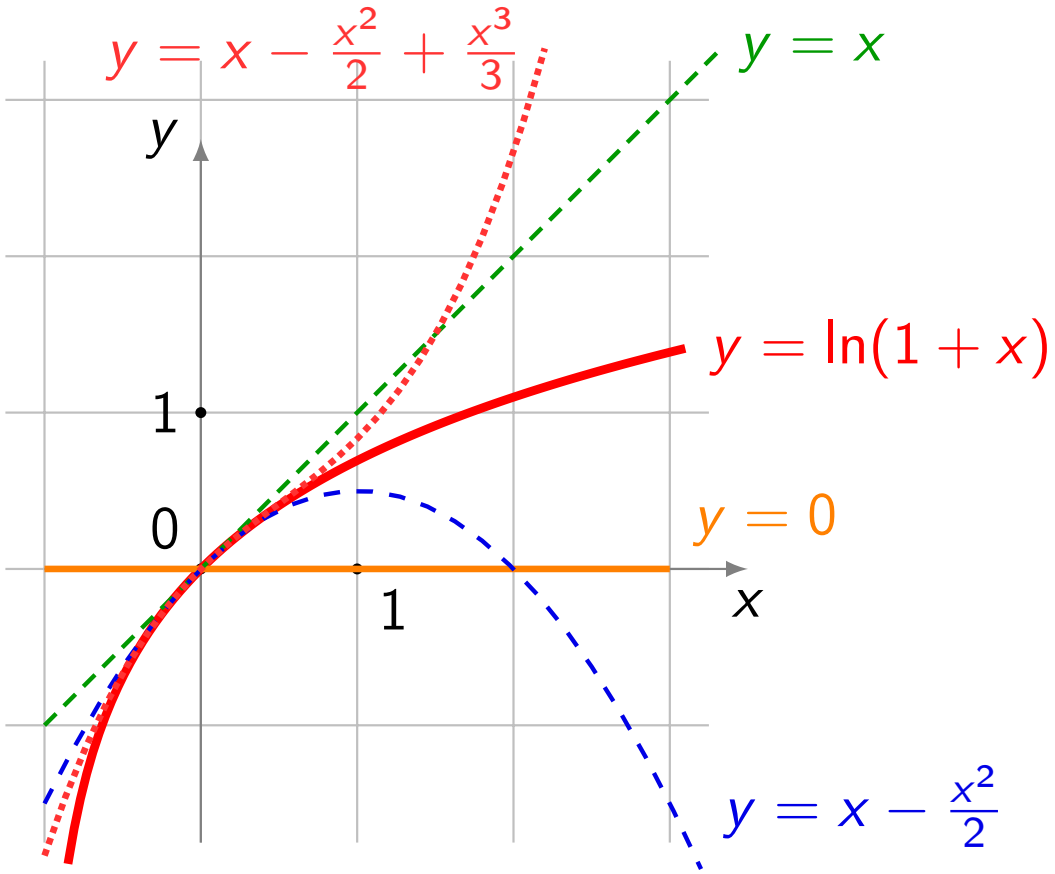
- Teorema del Valor Medio: f derivabile su un intervallo J; $a \in J$ fissato; per ogni $x \in J$ esiste c, compreso tra a e x:
  $\boxed{f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)}$ Si generalizza a una approssimazione polinomiale globale: se f è derivabile n volte, esiste c tra a e x:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + .. + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(a)(x-a)^{n-1}}_{P_{a,n}(x) = \text{Polinomio di Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n}_{\text{Resto di Lagrange}}}$$

Polinomi di Taylor per e^x, centrati in zero.



Polinomi di Taylor per $\log_e(1+x)$, centrati in zero.



I polinomi di Taylor

Teorema (Polinomio di Taylor)

Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *derivabile* n *volte in* $a \in I$. *Allora esiste un unico polinomio* $P_{a,n}(x)$ *– o più semplicemente* $P_n(x)$ *– di grado minore o uguale a* n, *soddisfacente le* $n+1$ *condizioni:*

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \ldots\ldots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Tale polinomio, detto polinomio di Taylor di ordine n *di* f, *centrato in* a, *è dato da:*

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Esempio. $f(x) = e^x$, $a = 0$. Per ogni intero $n \geq 0$, il polinomio di Taylor di ordine n centrato in $a = 0$ è

$$P_{0,n}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Formula di Taylor con resto di Peano. (Studio locale)

Teorema (Formula di Taylor con il resto di Peano. (Locale).)

Ipotesi:

1) $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, *$I$ intervallo di* $\mathbb{R}$.

2) f derivabile n volte ($n \geq 1$ intero) in un fissato punto $a \in I$.

Tesi:

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + .. + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\textit{Resto di Peano}}}$$

Il resto di Peano è un $o((x-a)^n)$ per $x \to a$.

Quando $a = 0$, la formula si chiama anche Formula di Maclaurin.

Dimostrazione.

Cominciamo a studiare i casi $n = 1, 2$. Poi diamo la dimostrazione per n arbitrario.

Caso $n = 1$. Per $n = 1$, la tesi si riduce a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a) \quad (\text{per}\, x \to a)$$

che è la proprietà di differenziabilità di f in a. Quindi la tesi è vera.

Caso $n = 2$. Per $n = 2$, si deve dimostrare che

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2}{(x - a)^2} = 0 \qquad (1)$$

ossia, in modo equivalente,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{(x - a)^2} = \frac{f''(a)}{2!} \qquad (2)$$

Usiamo la regola dell'Hospital. Il limite del rapporto delle derivate è

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x - a)} = \frac{f''(a)}{2!} \qquad (3)$$

per la definizione stessa di $f''(a)$. Quindi il caso $n = 2$ è provato.

La dimostrazione nel caso generale (n qualunque) è del tutto analoga. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n} = 0 \tag{4}$$

ossia

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{5}$$

Usiamo la regola dell'Hospital. Calcolando successivamente il rapporto delle derivate. Otteniamo infine

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{6}$$

per la definizione stessa di derivata $f^{(n)}(a)$. Dunque, per l'Hospital vale (5) e il teorema è così dimostrato. Q.E.D.

Alcuni importanti sviluppi locali di Taylor (resto di Peano)

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Altri sviluppi locali: Il binomio di Newton

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots+(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

Altri sviluppi locali. (Taylor, resto di Peano)

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

(L'espressione generale per i coefficienti è difficile.)

Prima applicazione: calcolo di limiti. Esempi.

Esempio

(1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Soluzione. *Per* $x \to 0$*:*

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{x - (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} \to \frac{1}{6}$$

(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

Soluzione. *Per* $x \to 0$*:*

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3))}{x^3}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} \to \frac{1}{2}$$

Esempio

(3) Calcolare il limite:

$$\lim_{y\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{y}\right)e^y - \left(\frac{1}{y}\right)\frac{e^y-1}{y}\right]$$

Soluzione. Per $y \to 0^+$:

$$\begin{aligned}\left[\frac{e^y}{y} - \frac{1}{y}\frac{e^y-1}{y}\right] &= \frac{ye^y - e^y + 1}{y^2}\\ &= \frac{y(1+y+y^2/2!+o(y^2)) - (1+y+y^2/2!+o(y^2)) + 1}{y^2}\\ &= \frac{y+y^2+y^3/2!+o(x^3) - 1 - y - y^2/2! + o(y^2) + 1}{y^2}\\ &= \frac{y^2/2 + o(y^2)}{y^2}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{o(y^2)}{y^2} \to \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Seconda applicazione: massimi e minimi con le derivate

Teorema (Massimi e minimi; test delle derivate.)

Ipotesi.

$$f'(a) = ... = f^{n-1}(a) = 0; \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Tesi.

1. *Se n è pari e $f^{(n)}(a) > 0$, allora f ha un minimo locale in a.*
2. *Se n è pari e $f^{(n)}(a) < 0$, allora f ha un massimo locale in a.*
3. *Se n è dispari, f non ha né un massimo locale, né un minimo locale in a.*

Dimostrazione. Per la formula di Taylor (locale),

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x-a)^n$$

$$= (x-a)^n \underbrace{\left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x-a)^n}{(x-a)^n}\right]}_{\to \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ per } x \to a} = (x-a)^n \underbrace{Q(x)}_{\text{Stesso segno di } f^{(n)}(a)}$$

Se $x \neq a$ è sufficientemente vicino ad a, $Q(x) = \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x-a)^n}{(x-a)^n}\right]$ ha lo stesso segno di $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ (permanenza del segno). Quindi:

- Se n è pari e $f^{(n)}(a) > 0$, allora $(x-a)^n > 0$ e (per $x-a$ sufficientemente piccolo) $Q(x) > 0$. Dunque $f(x) - f(a) > 0$: f ha un punto di minimo in a. Il caso $f^{(n)}(a) < 0$ è analogo.
- Se n è dispari, $(x-a)^n$ cambia segno in ogni intorno di a, e quindi anche $f(x) - f(a)$. Quindi f non ha né un massimo locale, né un minimo locale in a.

Q.E.D.

Formula di Taylor con il resto di Lagrange. (Globale)

Teorema (Formula di Taylor con il resto di Lagrange)

Ipotesi: *f derivabile n volte su un intervallo J; $a \in J$ fissato.*

Tesi: *Per ogni $x \in J$ esiste un punto c, compreso tra a e x, per il quale:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots +$$
$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(a)(x-a)^{n-1} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{(n)!}(x-a)^n}_{\textit{Resto di Lagrange}}$$

Generalizza il teorema del valore medio di Lagrange:

$$\boxed{(n=1) \qquad f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)} \tag{7}$$

$$\boxed{(n=2) \qquad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2} \tag{8}$$

Dimostrazione. (Formula di Taylor con il resto di Lagrange.) Si noti che il caso $n = 1$ dà il teorema del valore medio di Lagrange. Dimostriamo la tesi del teorema nel caso $n = 2$, cioè: esiste c compreso tra a e x (diciamo, $a < c < x$), tale che

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2} \tag{9}$$

Il teorema di Cauchy, applicato sull'intervallo $[a, x]$ alle funzioni $t \to [f(t) - f(a) - f'(a)(t-a)]$ e $t \to (t-a)^2$, dice che

$$\exists c_1 \in (a, x) \quad \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{f'(c_1) - f'(a)}{2(c_1 - a)} \tag{10}$$

Ancora per il teorema di Cauchy, applicato su $[a, c_1]$ alle funzioni $u \to [f'(u) - f'(a)]$ e $u \to 2(u-a)$,

$$\exists c \in (a, c_1) \qquad \frac{f'(c_1) - f'(a)}{2(c_1 - a)} = \frac{f''(c)}{2} \tag{11}$$

Da (10) e (11) segue $\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{f''(c)}{2}$, che è la (9). Nel caso generale (n arbitrario), basterà applicare Cauchy n volte di seguito. Q.E.D.

Un'applicazione importante: stima dell'errore

Problema

Nell'intervallo $J = [0, \pi/4]$, *approssimiamo* $\sin x$ *con il polinomio di Taylor*

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Dare una stima dell'errore che si compie.

Soluzione

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos c}{5!} x^5$$

L'errore che si compie è dunque

$$\left| \frac{\cos c}{5!} x^5 \right| \leq \frac{(\pi/4)^5}{5!} \simeq 0,0024$$

La serie esponenziale. (Argomento facoltativo).

- (Taylor, resto di Lagrange). Per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un numero c, compreso tra 0 e x, tale che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^c \qquad (12)$$

- Per ogni x fissato, per $n \to +\infty$, il resto tende a zero. Infatti,

$$\frac{x^n}{n!} e^c \leq \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|} \to 0$$

- Abbiamo allora lo sviluppo di e^x (serie esponenziale):

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (13)$$

valido per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione: Il resto $R_n = \frac{x^n}{n!}e^c$ tende a 0

Dimostrazione (non richiesta)

Dimostriamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, il resto $\frac{x^n}{n!}e^c$ tende a 0. La successione $\frac{x^n}{n!}$ ($x \in \mathbb{R}$ fissato) tende a 0. (Fatto già dimostrato). Sia nel caso $x < c < 0$ che nel caso $0 < c < x$, vale $\mid c \mid < \mid x \mid$ e quindi

$$e^c \leq e^{|c|} < e^{|x|}$$

Dunque, posto $K = e^{|x|}$, vale sempre la disuguaglianza $e^c < K$. Dunque

$$0 < \frac{x^n}{n!}e^c < \frac{x^n}{n!}K$$

Siccome $\frac{x^n}{n!}K \to 0$, anche $\frac{x^n}{n!}e^c \to 0$ (per $n \to +\infty$) per il criterio del confronto. $\square$

Altri sviluppi in serie di potenze

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots && x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots && x \in \mathbb{R} \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n && -1 < x < 1 \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots && -1 < x < 1 \\
\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots && -1 < x < 1
\end{aligned}
$$