Serie numeriche

Federico Lastaria

Dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali. Politecnico di Milano

21 novembre 2022

Indice

- Serie convergenti, divergenti, indeterminate.
- La serie geometrica.
- Confronto tra serie e integrali. La serie armonica generalizzata.
- Criteri del confronto e del confronto asintotico
- Criterio della radice e del rapporto.
- Serie assolutamente convergenti.
- La serie esponenziale.
- Serie a termini di segno alterno (Criterio di Leibniz).

Serie numeriche

Vogliamo dare significato a una "somma infinita." Esempi:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \tag{1}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \tag{3}$$

Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots \tag{4}$$

consideriamo la successione delle somme parziali

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

Serie convergenti, divergenti, indeterminate

Definizione

Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, *poniamo:* $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

- *Si dice che la serie è convergente se la successione* S_n *converge a un numero (finito)* S. *Si scrive*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

- *Si dice che la serie è divergente a* $+\infty$ *(o a* $-\infty$*) se la successione* S_n *diverge a* $+\infty$ *(o a* $-\infty$*).*
- *Se infine la successione delle somme parziali* S_n *non converge e non diverge, si dice anche che la serie è indeterminata.*

La serie geometrica

Teorema

Carattere della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n + ... \tag{5}$$

1. *Se* $|q| < 1$ *converge a* $\frac{1}{1-q}$.
2. *Se* $q \geq 1$ *diverge a* $+\infty$.
3. *Se* $q \leq -1$ *è indeterminata.*

Dimostrazione (Serie geometrica)

La somma parziale S_n è data da:

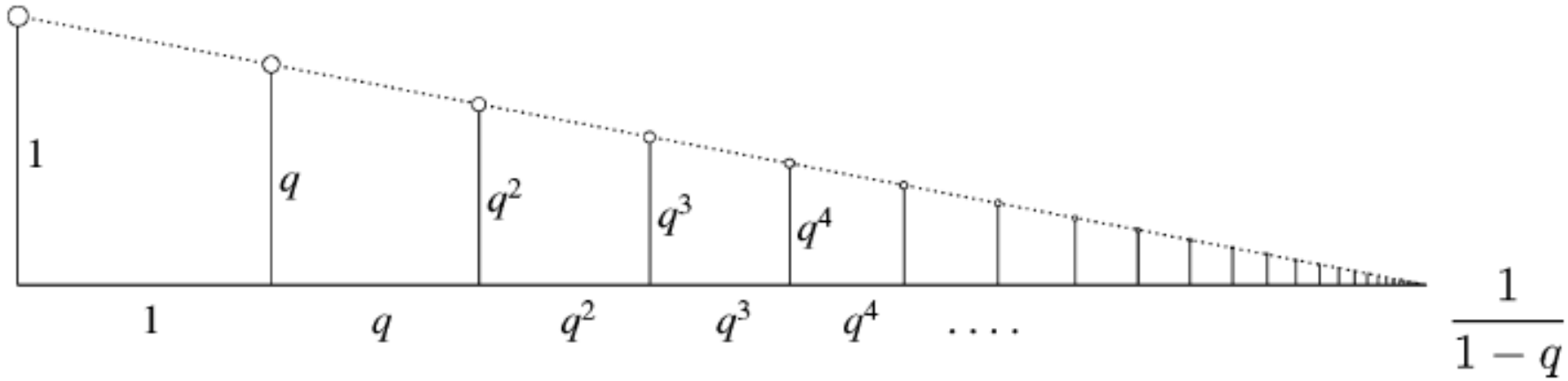
$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1. Se $|q| < 1$, la successione q^n tende a zero. Quindi

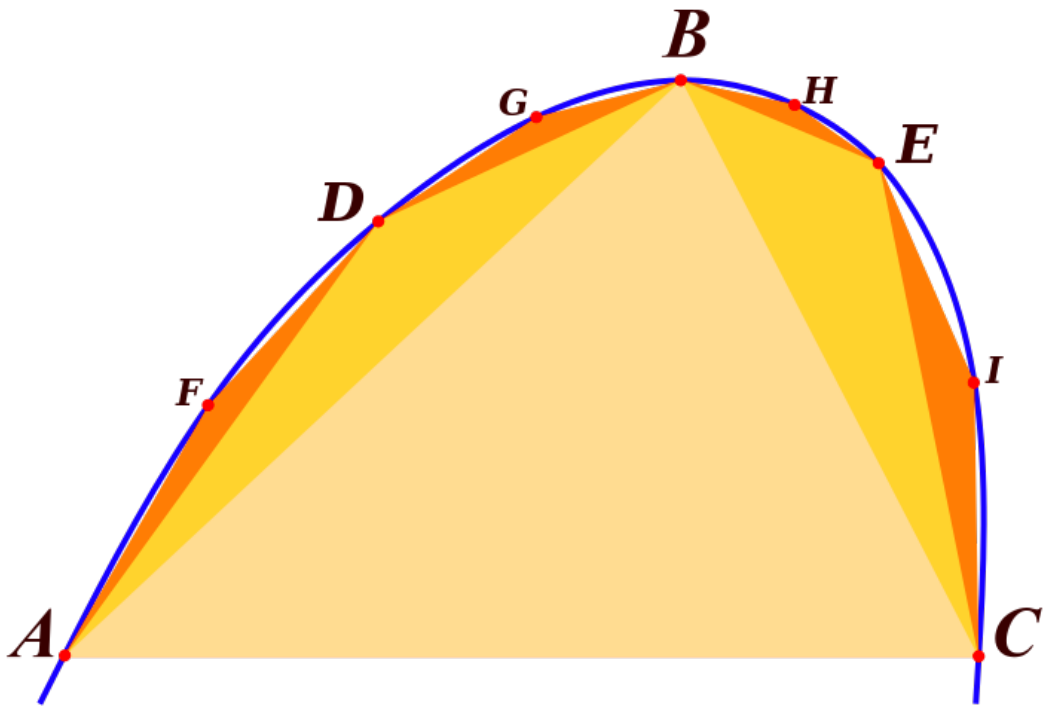
$$\lim S_n = \lim \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

2. Se $q \geq 1$, è ovvio che la successione S_n tende a $+\infty$.
3. Se $q \leq -1$, il termine q^{n+1} tende a $+\infty$ in valore assoluto, ma ha alternativamente segno positivo e negativo. Quindi la successione S_n non ha limite (oscilla). $\square$

Serie geometrica: una interpretazione geometrica



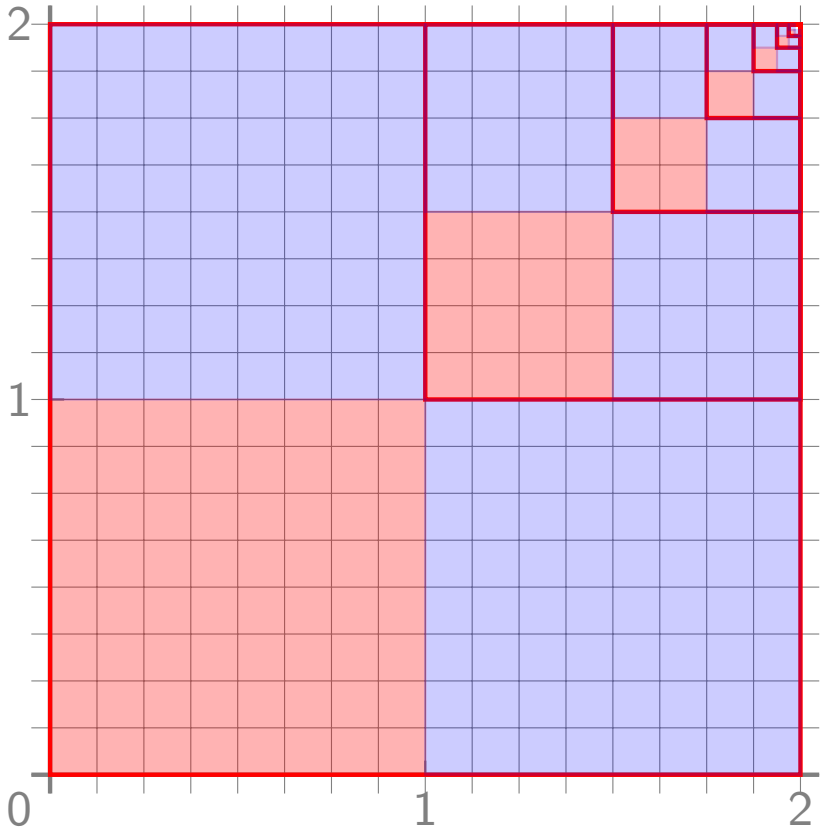
Archimede (287-212 a.C.). Area del segmento parabolico.



$ADB + BEC = \frac{1}{4} ABC$ e così via. Iterando:

$$\text{Area} = ABC + \tfrac{1}{4}ABC + \tfrac{1}{4^2}ABC + \cdots + \tfrac{1}{4^n}ABC + \cdots$$
$$\text{Area} = ABC\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4^2} + + \cdots + \tfrac{1}{4^n} + \cdots\right) = ABC\,\tfrac{4}{3}$$

Somma infinita: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3}$ (Archimede)



Esempio: i numeri come somme di serie

La successione

$$\begin{array}{lcll} 0,3 & = & & = & 3/10 \\ 0,33 & = & 0,3+0,03 & = & 3/10+3/100 \\ 0,333 & = & 0,3+0,03+0,003 & = & 3/10+3/100+3/1000 \\ .... & & .... & .... & .... \end{array}$$

tende a $0,\overline{3} = 0,333333.....$:

$$\begin{aligned} 0,\overline{3} &= \frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\cdots \\ &= \frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots\right) \\ &= \frac{3}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^n} \\ &= \frac{3}{10}\left[\frac{1}{1-1/10}\right]=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ è necessario per la convergenza

Teorema (Condizione necessaria per la convergenza)

Se una serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge, allora* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Supponiamo che la serie converga: $\lim_{k\to+\infty} S_k = L \in \mathbb{R}$.
Il termine n-esimo della serie è dato da $a_n = S_n - S_{n-1}$. Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} \\ &= L - L = 0 \end{aligned}$$

Riassumendo:

Una serie $\sum a_n$ il cui termine generale a_n non tenda a 0, non converge.

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ non è sufficiente per la convergenza

Controesempio

La serie armonica divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty$$

mostra che

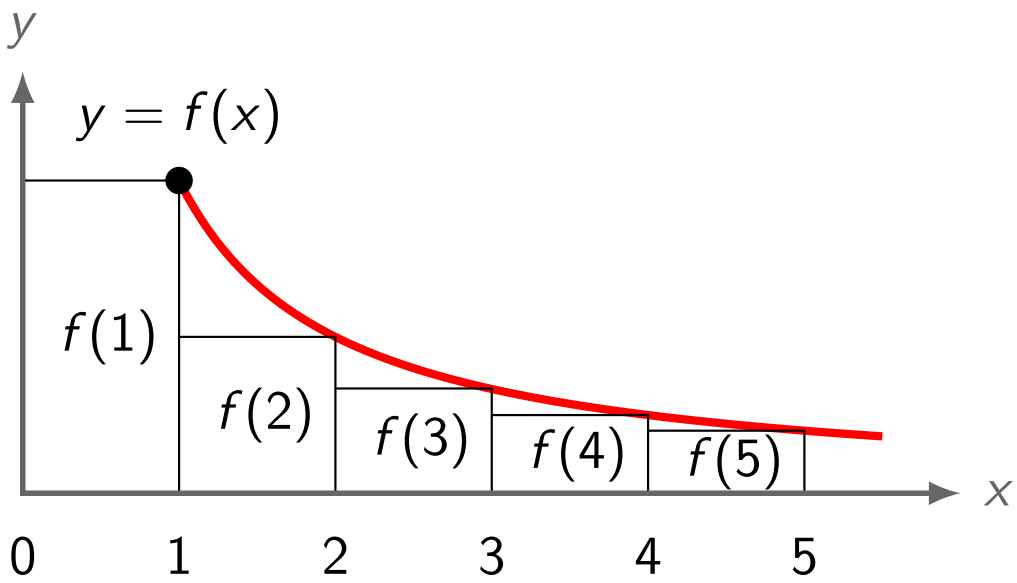
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \qquad \text{non implica} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ convergente.}$$

Confronto serie/integrale

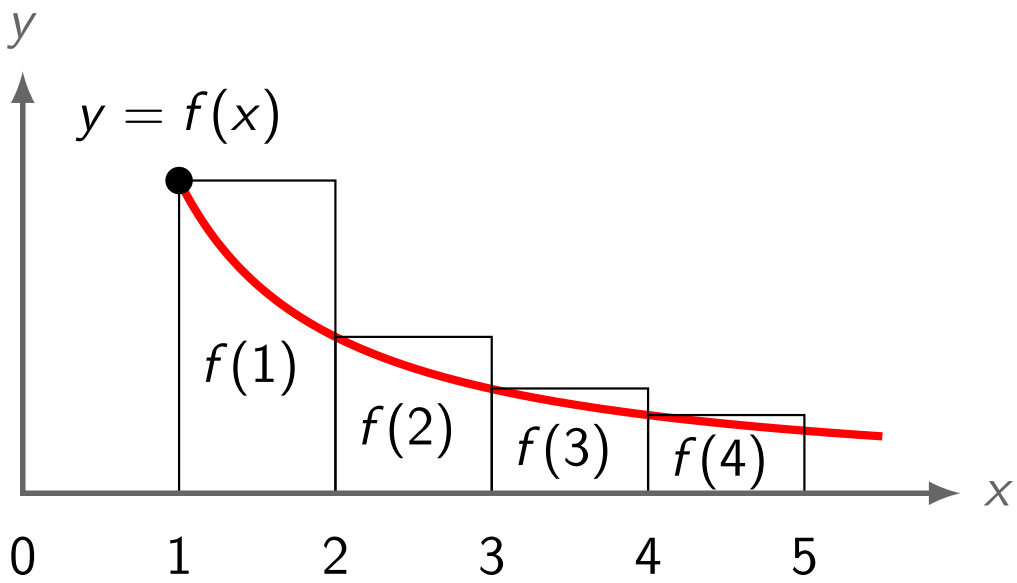
Teorema (Criterio dell'integrale)

Sia $[1, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione positiva e decrescente. Allora:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \quad \textit{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} f \quad \textit{converge} \tag{6}$$



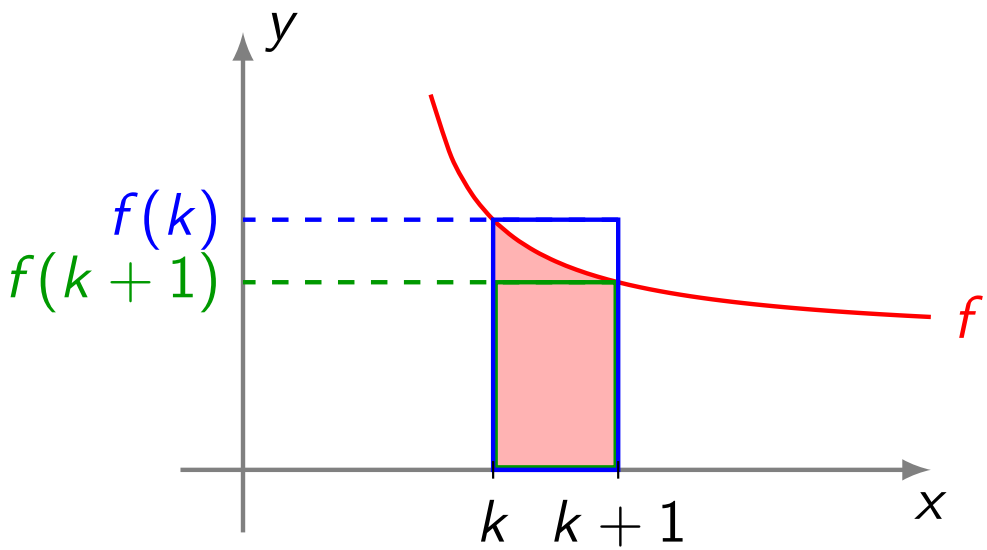
$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx > \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$



$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Dimostrazione

Consideriamo il grafico di f tra k e $k+1$:



$f(k)$ = area del rettangolo circoscritto (base 1, altezza $f(k)$);

$f(k+1)$ = area del rettangolo inscritto (base 1, altezza $f(k+1)$);

$\int_k^{k+1} f$ = area della regione al di sotto del grafico di f (e al disopra dell'asse x).

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k) \tag{7}$$

per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Sommando per k da 1 a n, otteniamo

$$f(2) + \cdots + f(n+1) \leq \int_1^{n+1} f \leq f(1) + \cdots + f(n) \tag{8}$$

ossia (posto $s_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$)

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f \leq s_n \tag{9}$$

Le disuguaglianze (9) mostrano che i due limiti

$$\lim_{n \to +\infty} s_n \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_1^{n+1} f$$

o esistono entrambi finiti, oppure sono entrambi $+\infty$, come volevamo dimostrare.

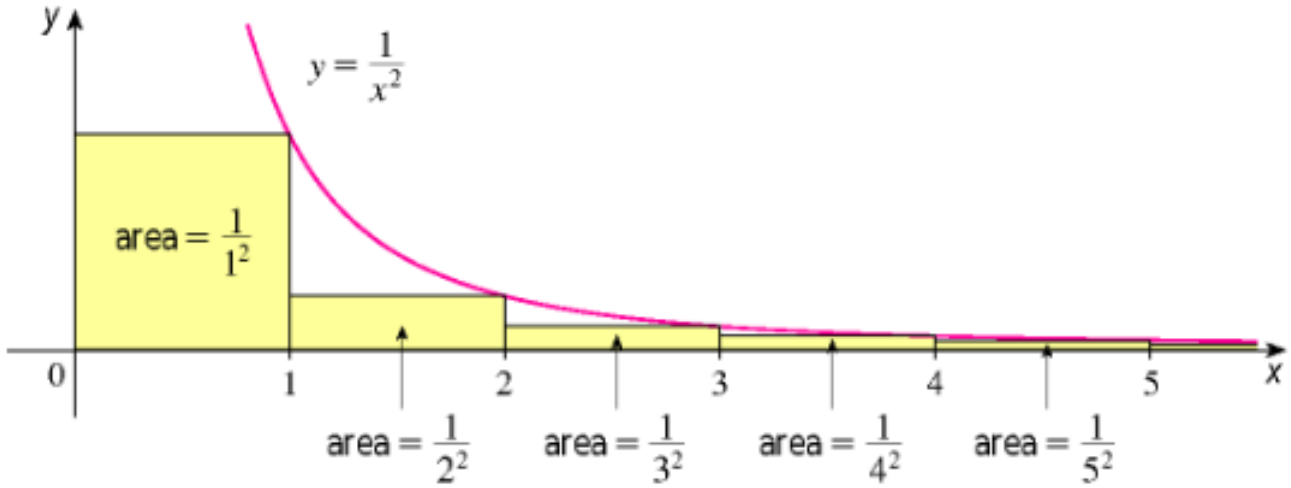
Serie armoniche generalizzate

Mediante un confronto tra le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ e gli integrali generalizzati del tipo $\int_1^{+\infty} 1/x^a \, dx$, si dimostra:

Teorema (Serie armoniche generalizzate)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } a > 1 \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

Dimostrazione: confronto con $1/x^a$. Caso $a > 1$



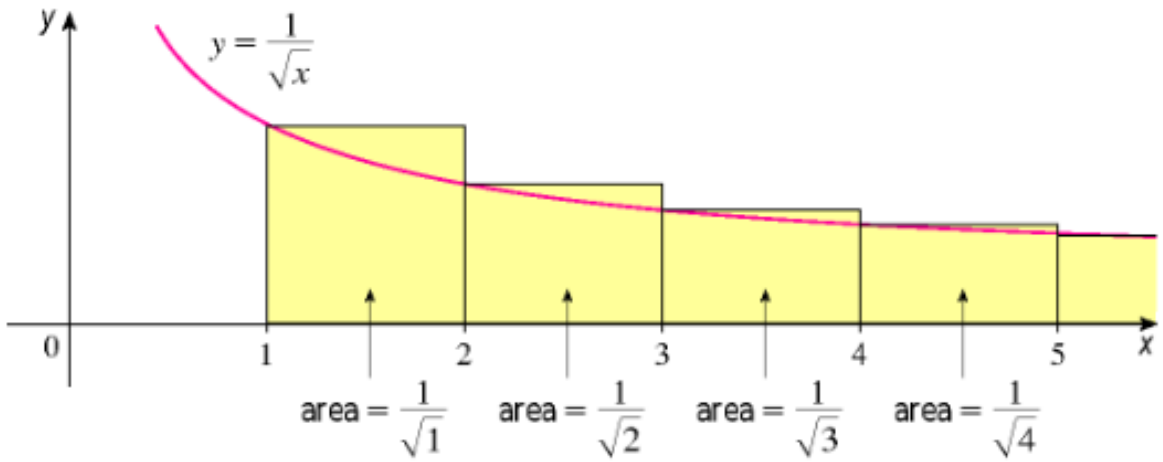
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx$$

Quando $n \to +\infty$,

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx < +\infty$$

Allora, anche la serie $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ converge.

Dimostrazione: confronto con $1/x^a$. Caso $a \leq 1$



$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = +\infty$, si ha anche

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots = +\infty$$

Criterio del confronto

Come per gli integrali generalizzati, anche per le serie numeriche a termini positivi valgono i criteri del confronto e del confronto asintotico.

Teorema (Criterio del confronto)

Siano a_n e b_n successioni reali e supponiamo che per qualche $K \in \mathbb{N}$ si abbia

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{per} \quad n \geq K \tag{10}$$

Allora:

(a) *La convergenza di $\sum b_n$ implica la convergenza di $\sum a_n$.*

(b) *La divergenza di $\sum a_n$ implica la divergenza di $\sum b_n$.*

Criterio del confronto asintotico

Teorema (Criterio del confronto asintotico)

Siano a_n e b_n successioni reali positive. Se $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$, allora le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. Per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > n_0$, $\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \varepsilon$ vale a dire

$$(1-\varepsilon)b_n < a_n < (1+\varepsilon)b_n \tag{11}$$

La tesi segue allora facilmente dal criterio del confronto : se $\sum_n a_n$ converge, allora $\sum_n (1-\varepsilon)b_n$ converge, e quindi anche $\sum_n b_n$; se invece $\sum_n a_n$ diverge, allora $\sum_n (1+\varepsilon)b_n$ diverge, e quindi $\sum_n b_n$ diverge. □

Criterio della radice (di Cauchy)

Teorema (Criterio della radice)

Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini positivi, e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \tag{12}$$

Allora, se $0 \leq L < 1$ la serie converge, mentre se $L > 1$ (o $L = +\infty$) diverge. (Se $L = 1$, non si può concludere nulla.)

Dimostrazione. Supponiamo $L < 1$. Scegliamo un q che soddisfi $L < q < 1$. Poiché $\sqrt[n]{a_n} \to L < q$, esiste n_0 tale che $\sqrt[n]{a_n} < q$ per tutti gli $n > n_0$. Allora avremo $a_n < q^n$ per tutti gli $n > n_0$, e siccome la serie geometrica $\sum_n q^n$ converge, per il criterio del confronto anche la serie $\sum_n a_n$ converge.
Se invece $L > 1$, si avrà definitivamente $\sqrt[n]{a_n} > 1$, e quindi $a_n > 1$. Allora la successione a_n non tende a zero; quindi la serie $\sum_n a_n$ non converge, e quindi diverge (non potendo oscillare). □

Criterio della radice: esempi.

Esercizio

Studiare il carattere delle serie:

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3}{(\log n)^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}$

Soluzioni:

(1) $\displaystyle\sqrt[n]{\frac{n^3}{(\log n)^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\log n} \sim \frac{1}{\log n} \to 0 < 1.$ Converge.

(2) $\displaystyle\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \frac{2}{n} \to 0 < 1.$ Converge.

Criterio del rapporto (di D'Alembert)

Teorema (Criterio del rapporto)

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi, e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \tag{13}$$

Allora, se $0 \le L < 1$ la serie converge, mentre se $L > 1$ (incluso il caso $L = +\infty$) diverge. (Se $L = 1$, non si può concludere nulla.)

Dimostrazione. Supponiamo $0 \le L < 1$. Scegliamo un q che soddisfi $L < q < 1$. Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L < q$, esiste un intero n_0 tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ per tutti gli $n > n_0$. Non è restrittivo supporre $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ per ogni n. Da

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\frac{a_1}{a_0}}_{(n+1)\text{ fattori}} < q\cdots q = q^{n+1} \tag{14}$$

segue allora, per ogni n, $a_{n+1} < a_0\, q^{n+1}$ La serie $\sum_n a_0\, q^n$ converge (confronto con la serie geometrica); quindi anche $\sum_n a_n$ converge. □

Criterio del rapporto: esempi.

Esercizio

Studiare il carattere delle serie:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$, *con* $a > 0$ *fissato.*
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$

Soluzioni:

(1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1$. Converge.

(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$. Converge.

Serie a termini di segno qualunque

Finora abbiamo studiato serie con termini (definitivamente) positivi. Passiamo ora a serie $\sum_n a_n$ a termini di segno qualunque.

Definizione

Una serie $\sum_n a_n$ si dice assolutamente convergente se la serie dei valori assoluti $\sum_n |a_n|$ è convergente.

Teorema (Assolutamente convergente implica convergente)

$$\sum_n |a_n| \quad \textit{convergente} \quad \Longrightarrow \quad \sum_n a_n \quad \textit{convergente}$$

Vale a dire: se una serie è assolutamente convergente, allora è convergente.

Attenzione. Il teorema non si inverte: vedremo che la serie $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente (criterio di Leibniz), ma non è assolutamente convergente.

Dimostrazione.

Definiamo:

$$b_k = \begin{cases} a_k & \text{se } a_k \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_k < 0 \end{cases} \qquad c_k = \begin{cases} 0 & \text{se } a_k \geq 0 \\ -a_k & \text{se } a_k < 0 \end{cases}$$

Si noti che: $0 \leq b_k \leq |a_k| \quad 0 \leq c_k \leq |a_k| \quad a_k = b_k - c_k$

Poiché $\sum_n |a_n|$ converge, per il criterio del confronto anche $\sum_n b_n$ e $\sum_n c_n$ convergono. Allora, anche

$$\sum_n a_n = \sum_n (b_n - c_n) = \left(\sum_n b_n\right) - \left(\sum_n c_n\right)$$

converge. □

Esempio molto importante: la serie esponenziale

Esempio

La serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Studiamo la serie dei valori assoluti: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x^n|}{n!}$. A questa serie a termini positivi possiamo applicare il criterio del rapporto:

$$\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} : \frac{|x^n|}{n!} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \ (< 1) \quad \text{per } n \to +\infty$$

La serie esponenziale converge assolutamente per ogni x, e quindi converge per ogni x.

Si definisce:

$$\boxed{\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Esempio

Esempio

Dire per quali valori di x converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3(x-1)^n \quad (1)$

Studiamo la serie dei valori assoluti: $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3|x-1|^n$. A questa serie, che è a termini positivi, possiamo applicare il criterio della radice: $\lim_n \sqrt[n]{n^3|x-1|^n} = |x-1| \lim_n \sqrt[n]{n^3} = |x-1|$. Allora la serie dei valori assoluti converge per $|x-1| < 1$, cioè per $0 < x < 2$. Quindi, per $0 < x < 2$ anche la serie (1) converge. Per $|x-1| \geq 1$, $|n^3(x-1)^n| \geq n^3$ non tende a zero, quindi la serie (1) non converge. Quindi la serie (1) converge se e solo se $0 < x < 2$.

Serie con termini di segno alterno (Criterio di Leibniz)

Teorema (Criterio di Leibniz)

Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, una successione positiva, decrescente e infinitesima. Allora la serie

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

converge.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la successione S_n delle somme parziali:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 \\ S_1 &= a_0 - a_1 \\ S_2 &= a_0 - a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_0 - a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n \end{aligned}$$

La successione delle somme parziali S_{2k} con indici pari è decrescente. Infatti,

$$S_{2k+2} = S_{2k} \underbrace{-a_{2k+1} + a_{2k+2}}_{<0} < S_{2k}$$

($-a_{2k+1} + a_{2k+2} < 0$ perché, per ipotesi, a_n è decrescente.) Allo stesso modo, vediamo che che la successione delle somme parziali S_{2k-1} con indici dispari è crescente:

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} + \underbrace{a_{2k} - a_{2k+1}}_{>0} > S_{2k-1}$$

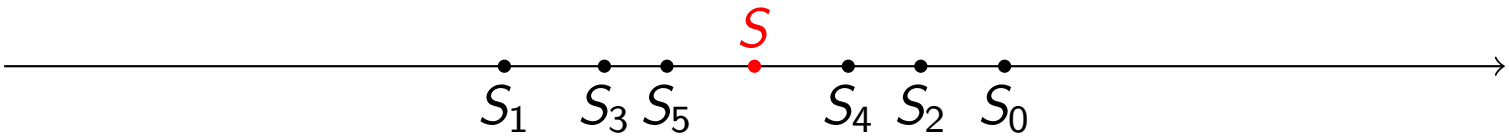
($a_{2k} - a_{2k+1} > 0$ perché a_n è decrescente.)

A priori, la successione S_{2k} (essendo decrescente) tende a un limite finito oppure a $-\infty$, mentre la successione S_{2k+1} (essendo crescente) tende a un limite finito oppure a $+\infty$. Ma, siccome

$$\lim_{k\to+\infty}(S_{2k}-S_{2k-1})=\lim_{k\to+\infty}a_{2k}=0$$

i due limiti delle successioni S_{2k} e e S_{2k-1} *sono entrambi finiti*. Inoltre, devono essere *e uguali tra loro*, perché

$$\left(\lim_{k\to+\infty}S_{2k}\right)-\left(\lim_{k\to+\infty}S_{2k-1}\right)=\lim_{k\to+\infty}(S_{2k}-S_{2k-1})=\lim_{k\to+\infty}a_{2k}=0$$



Chiamiamo

$$\lim_{k\to+\infty}S_{2k}=\lim_{k\to+\infty}S_{2k-1}=S$$

Allora, anche $\lim_{n\to+\infty}S_n=S$. □

Esempio

Esempio

La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

è convergente (ma non è assolutamente convergente).

Infatti, questa serie converge perché soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz: i termini sono a segno alterno; la successione dei valori assoluti $a_n = \frac{1}{n}$ è decrescente e infinitesima.
Si può dimostrare che $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1} = \log 2$.
La convergenza non è assoluta, perché la serie (armonica) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$ diverge a $+\infty$.

Osservazione.

Dalla dimostrazione del Criterio di Leibniz segue che *le somme parziali* S_{2k} *di indice pari forniscono un valore approssimato per eccesso della somma* S, *mentre le somme parziali* S_{2k+1} *di indice dispari forniscono un valore approssimato per difetto*.
Inoltre, l'errore $|S_n - S|$ *è maggiorato da* a_{n+1}, ossia è maggiorato dal valore assoluto del primo termine trascurato. Infatti, a seconda che n sia pari o dispari:

$$0 \leq S - S_{2k-1} \leq S_{2k} - S_{2k-1} = a_{2k}$$
$$0 \leq S_{2k} - S \leq S_{2k} - S_{2k+1} = a_{2k+1}$$