Esercitazione

25 Novembre 2021

Integrali generalizzati e serie numeriche

Esercizio 0.1

Stabilire se i seguenti integrali generalizzati convergono:

1. $\displaystyle\int_0^1 \log x \, dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

Risposte

1. $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx = \lim_{t\to 0^+} [x\log x - x]_t^1 = -1.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$. Converge.
   (i) Confronto asintotico. Per $x \to 1^-$:
   $\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}} \sim \frac{1}{3(1-x)^{1/2}}$.
   (ii) Confronto: $\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$. Diverge. Infatti, per $x \to +\infty$:
   $$\frac{1}{\sqrt{2x+3}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}.$$

Esercizio 0.2

Stabilire se è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\left(\sqrt{\tan t}\right)^3}\, dt$$

RISPOSTA. Per $t \to 0^+$,

$$\frac{\sin t}{\left(\sqrt{\tan t}\right)^3} \sim \frac{t}{t^{3/2}} = \frac{1}{t^{1/2}}$$

Converge.

Ricordare: Per ogni $b \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{e^x} = 0$$

Esercizio 0.3

Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ converge l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{e^x} \, dx$$

Risposta: Converge per ogni $a \in \mathbb{R}$. Infatti, per x grande, vale $x^a/e^x < 1/x^2$, ovvero $x^{2+a}/e^x < 1$, perché $x^{2+a}/e^x \to 0$ per $x \to +\infty$.

Esercizio 0.4

Dimostrare che l'integrale generalizzzato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-|t|}\,dt$$

converge. (Vale a dire, convergono entrambi gli integrali $\int_{-\infty}^{0} f$ *e* $\int_{0}^{+\infty} f$*.)*

SUGGERIMENTO. Vedere l'esercizio precedente.

Esercizio 0.5

Stabilire per quali $\beta \in \mathbb{R}$ converge l'integrale generalizzato

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\log t)^\beta}\, dt$$

RISPOSTA. Caso $\beta = 1$: Una primitiva di $\frac{1}{t(\log t)}$ è $\log \log t$; l'integrale diverge.
Caso $\beta \neq 1$: Una primitiva è $F(x) = \frac{1}{-\beta+1}(\log t)^{-\beta+1}$ Si vede allora che l'integrale I converge se $-\beta + 1 < 0$, ossia $\beta > 1$, diverge se $\beta < 1$.
Conclusione: L'integrale I converge se $\beta > 1$ e diverge se $\beta \leq 1$.

Esercizio 0.6

Stabilire se converge l'integrale generalizzato $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$*, dove*

$$f(t) = \sqrt{t^2+1}\,\sin^2\left(\frac{1}{\log t}\right)\log\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$$

SOLUZIONE. Per $t \to +\infty$:

$$f(t) \sim t\frac{1}{(\log t)^2}\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t(\log t)^2}$$

Converge. (Esercizio precedente.)

Ricordare: Per ogni $a > 0$, per ogni $b \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{t \to 0^+} t^a (-\log t)^b = 0$$

Esercizio 0.7

Dimostrare che l'integrale generalizzato

$$I = \int_0^1 \frac{(-\log t)^\beta}{\sqrt{t}}\, dt$$

converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Criterio del confronto. Per t grande, $\frac{(-\log t)^\beta}{\sqrt{t}} < \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$, ossia $t^{\frac{1}{4}} (-\log t)^\beta < 1$, perché $t^{\frac{1}{4}} (-\log t)^\beta \to 0$.

Ricordare: $\forall a > 0 \ \ \forall b \in \mathbb{R} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{(\log t)^b}{t^a} = 0$

Esercizio 0.8

Dimostrare che l'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2 (\log t)^\beta}\, dt$$

converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. (Ovvio per $\beta \geq 0$.)
Più in generale,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\log t)^\beta}\, dt$$

converge per ogni $\alpha > 1$, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

Usiamo il criterio del confronto. Sia $1 < \alpha' < \alpha$. Dico che, per x grande, si ha $\frac{1}{t^\alpha (\log t)^\beta} < \frac{1}{x^{\alpha'}}$, ossia $\frac{1}{t^{\alpha-\alpha'} (\log t)^\beta} < 1$. Infatti, l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\frac{1}{t^{\alpha-\alpha'} (\log t)^\beta} \to 0$ per $x \to +\infty$.

Criterio del rapporto

Esercizio 0.9

Studiare il carattere delle serie $\sum_k a_k$*, il cui termine generale è:*

1. $a_k = \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}$
2. $a_k = \frac{(2k)!}{(k!)^2}$

RISPOSTE.

(1) Converge. $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{2k+1} \to \frac{1}{2} < 1$

(2) Diverge. $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \to 4 > 1$

Esercizio 0.10

Studiare la convergenza delle serie seguenti:

1. $$\sum_{1}^{n} \frac{\cos(n\vartheta)}{n^2}, \quad (\vartheta \text{ fissato}).$$
2. $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$
3. $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$
4. $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2}}$$
5. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$$
6. $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$$

Suggerimenti.

(1): Assolutamente convergente, quindi convergente. (2) e (3): Convergono per il criterio di Leibniz. (4) Diverge. $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2}} \sim \frac{1}{n^{2/3}}$ (5) Converge. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0 < 1$ (6) Diverge. $\frac{1}{(\ln n)^2} > \frac{1}{n}$

Esercizio 0.11

Studiare la convergenza delle serie seguenti:

1. $$\sum_{n=2}^{n} \frac{1}{n^2 \ln n}$$
2. $$\sum_{n=1}^{n} \frac{n!}{n^n}$$
3. $$\sum_{n=1}^{n} \frac{3^n n!}{n^n}$$
4. $$\sum_{n=1}^{n} \frac{3+\sin^3(n+2)}{2^n+n^2}$$
5. $$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$
6. $$\sum_{n=1}^{n} n \sin(3^{-n})$$

Suggerimenti (Slide precedente.)

(1) Converge. $(\frac{1}{n^2 \ln n} < \frac{1}{n^2})$

(2) Converge. $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1$

(3) Diverge. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{e} > 1$

(4) Converge. $a_n \sim \frac{3}{2^n}$, per $n \to +\infty$.

(5) Diverge, perché, per $n \to +\infty$, $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}$

(6) Converge. Confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, $n \sin(3^{-n}) \sim \frac{n}{3^n}$ e la serie di termine generale $\frac{n}{3^n}$ converge (per il criterio del rapporto).

Esercizio 0.12

Studiare la convergenza delle serie seguenti:

1. $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$$
2. $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$
3. $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$$
4. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$$
5. $$\sum_{n=2}^{n} \frac{1}{n \ln n}$$
6. $$\sum_{n=2}^{n} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

SUGGERIMENTI (Slide precedente.)

(1) Diverge. ($\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$)

(2) Converge. (Criterio della radice).

(3) Diverge. ($\frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$)

(4) Diverge. ($\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$)

(5) Diverge. Confronto con l'integrale.

(6) Converge. Confronto con l'integrale.