Integrali curvilinei (Integrali di densità lungo curve)
Applicazioni geometriche e fisiche

13 - 15 Dicembre 2021

Indice:

- Curve parametrizzate nello spazio.
- Lunghezza di una curva.
- Integrali curvilinei. Applicazioni geometriche e fisiche: massa totale, baricentro.
- Approfondimenti: il baricentro di un triangolo, il teorema di Ceva.

Curva parametrizzata nel piano o nello spazio

Definizione (Curva parametrizzata, o cammino parametrizzato)

Una curva parametrizzata nello spazio $\mathbb{R}^3$ *è una funzione*

$$[a,b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3 \qquad t \longmapsto C(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad t \in [a,b]$$

Il sostegno di una curva C *è l'immagine* $\mathrm{Im}\ C$ *della funzione* C*, cioè l'insieme di tutti i punti* $C(t)$*, al variare di* t *in* $[a,b]$*:*

$$\textit{Sostegno di } C = \mathrm{Im}\ C = \{C(t) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [a,b]\}$$

Analogamente, una funzione $[a,b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2$ *è una curva parametrizzata nel piano* $\mathbb{R}^2$*.*

Curve di classe $\mathcal{C}^1$. Vettore tangente.

Definizione

- *Una curva* $[a,b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$, $C(t) = (x(t), y(t), z(t))$, *si dice di classe* $\mathcal{C}^1$ *se le sue componenti* $x(t), y(t), z(t)$ *sono di classe* $\mathcal{C}^1$, *cioè, sono derivabili con derivata continua sull'intervallo* $[a,b]$.
- *Se* C *è una curva parametrizzata di classe* $\mathcal{C}^1$, *il vettore*

$$C'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

si chiama vettore tangente o vettore velocità istantanea della curva C *in* t.

Esempio. Elica cilindrica.

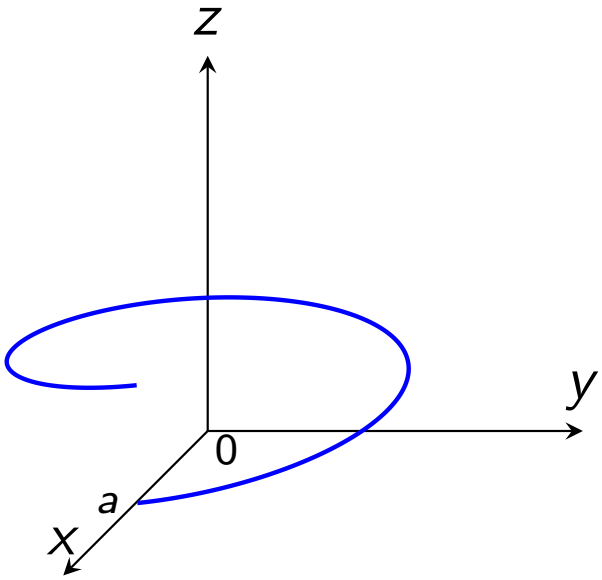


Figura : Elica cilindrica:

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$$

$C(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$
$(a > 0;\ b > 0)$

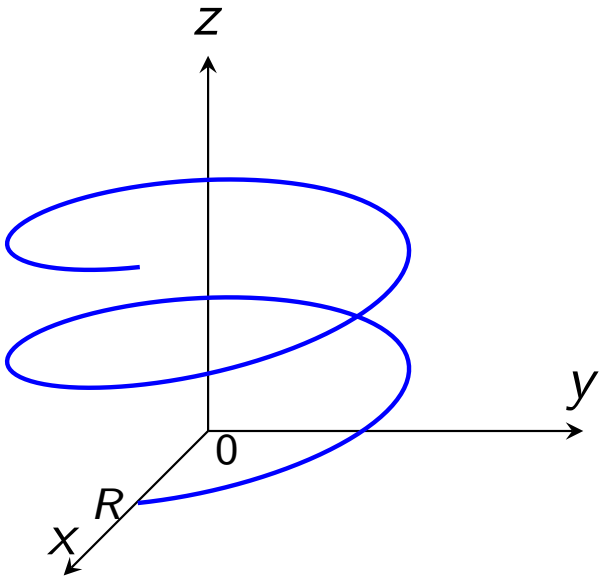


Figura : Elica cilindrica:

$$[0, 4\pi] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$$

$C(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$
$(a > 0;\ b > 0)$.

Esempio. Elica cilindrica ($b < 0$).

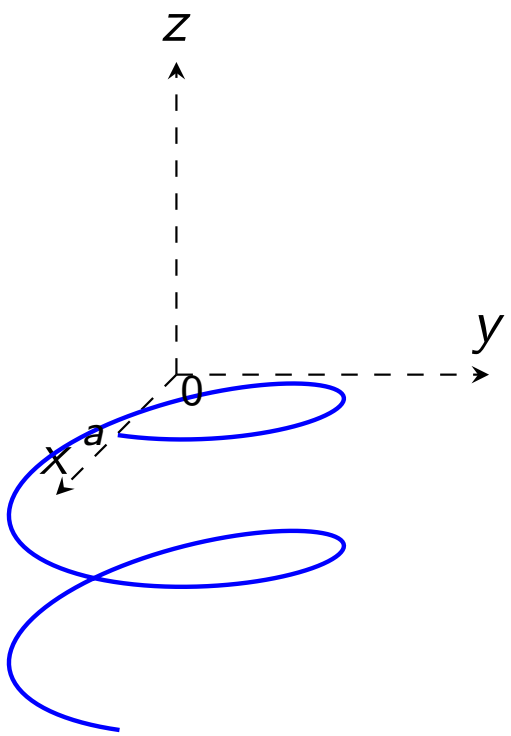


Figura : Elica cilindrica $[0, 4\pi] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$, $C(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $b < 0$.

La cicloide

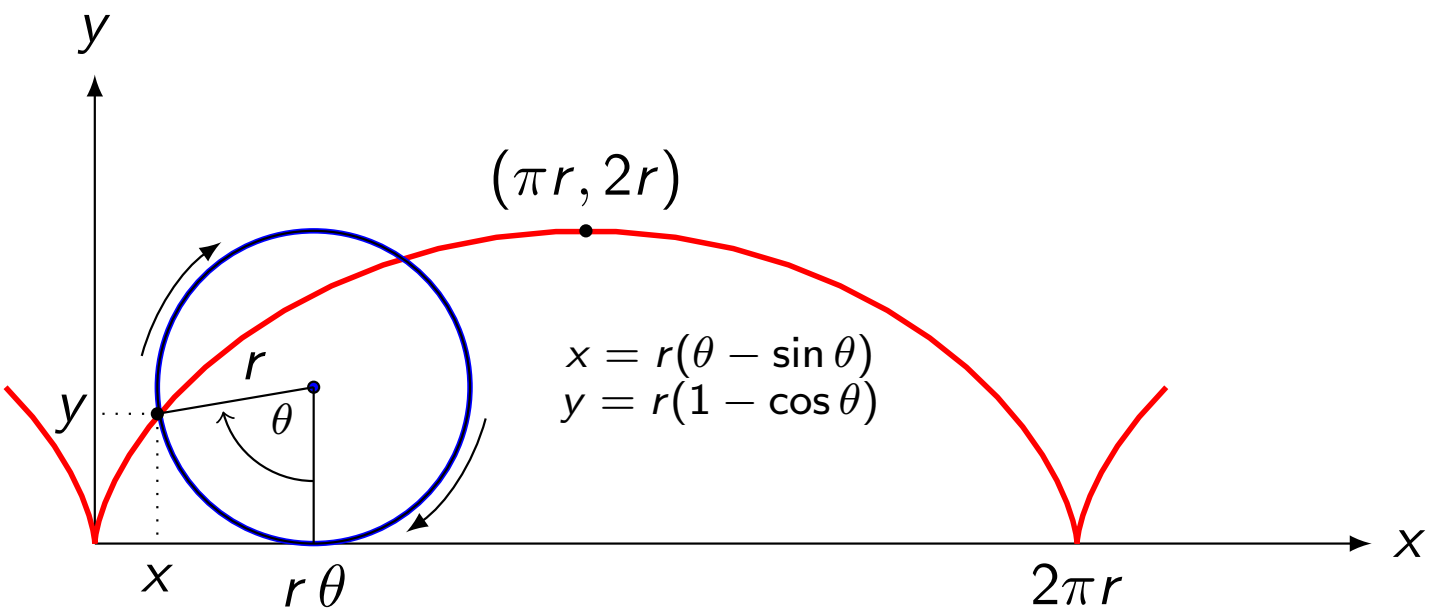
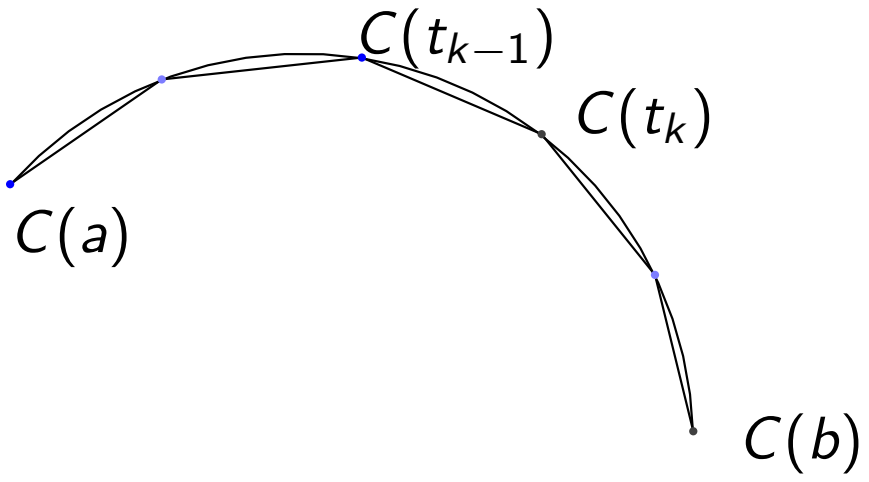


Figura : Un arco della cicloide

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2, \qquad C(\vartheta) = (r(\vartheta - \sin\vartheta), r(1 - \cos\vartheta))$$

La cicloide è la curva descritta da un punto di una circonferenza di raggio r quando la circonferenza rotola, senza strisciare, sull'asse delle x.

Lunghezza di una poligonale inscritta in una curva



Presa una suddivisione $\Delta = (t_0, ..., t_k, ..., t_m)$ di $[a, b]$ (con $t_0 = a < ... < t_k < ... < t_m = b$), il numero

$$\ell_\Delta = \sum_{k=1}^{m} |C(t_k) - C(t_{k-1})|$$

rappresenta la lunghezza di una poligonale inscritta nel cammino $[a, b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$.

Lunghezza di un cammino continuo

Definizione (Lunghezza di un cammino continuo; cammini rettificabili.)

Si dice lunghezza di un cammino continuo $[a, b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$ *l'estremo superiore (da intendersi eventualmente uguale a* $+\infty$*) delle lunghezze di tutte le poligonali inscritte:*

$$L(C) = \sup_{\Delta} \ell_{\Delta}$$

al variare di Δ *nell'insieme di tutte le partizioni dell'intervallo* $[a, b]$*. Il cammino* C *si dice rettificabile se* $L(C) < +\infty$*.*

Lunghezza di una curva parametrizzata di classe $\mathcal{C}^1$

Teorema

Ogni curva $[a,b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$ *di classe* $\mathcal{C}^1$ *su un intervallo compatto* $[a,b]$ *è rettificabile e la sua lunghezza è data da:*

$$L(C) = \int_a^b |C'(t)|\, dt \left(= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt \right)$$

(Non dimostriamo questo teorema. Per la dimostrazione, si veda: Giovanni Prodi, Analisi Matematica, Bollati Boringhieri.)

Esempio: Lunghezza della circonferenza

Esercizio

Calcolare la lunghezza della circonferenza di raggio R.

Una parametrizzazione della circonferenza di raggio R è

$$C(t) = (x(t), y(t)) = (R\cos t, R\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Il vettore tangente è $C'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$, il cui modulo è

$$|C'(t)| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R$$

Quindi la lunghezza della circonferenza è data da:

$$\int_0^{2\pi} |C'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$$

Esempio: Lunghezza dell'elica cilindrica

Esercizio

Calcolare la lunghezza dell'elica cilindrica

$$C(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{1}$$

Il vettore tangente è $C'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ e il suo modulo è

$$|C'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Allora la lunghezza dell'elica è

$$\int_0^{2\pi} |C'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

Lunghezza di un'elica: interpretazione geometrica

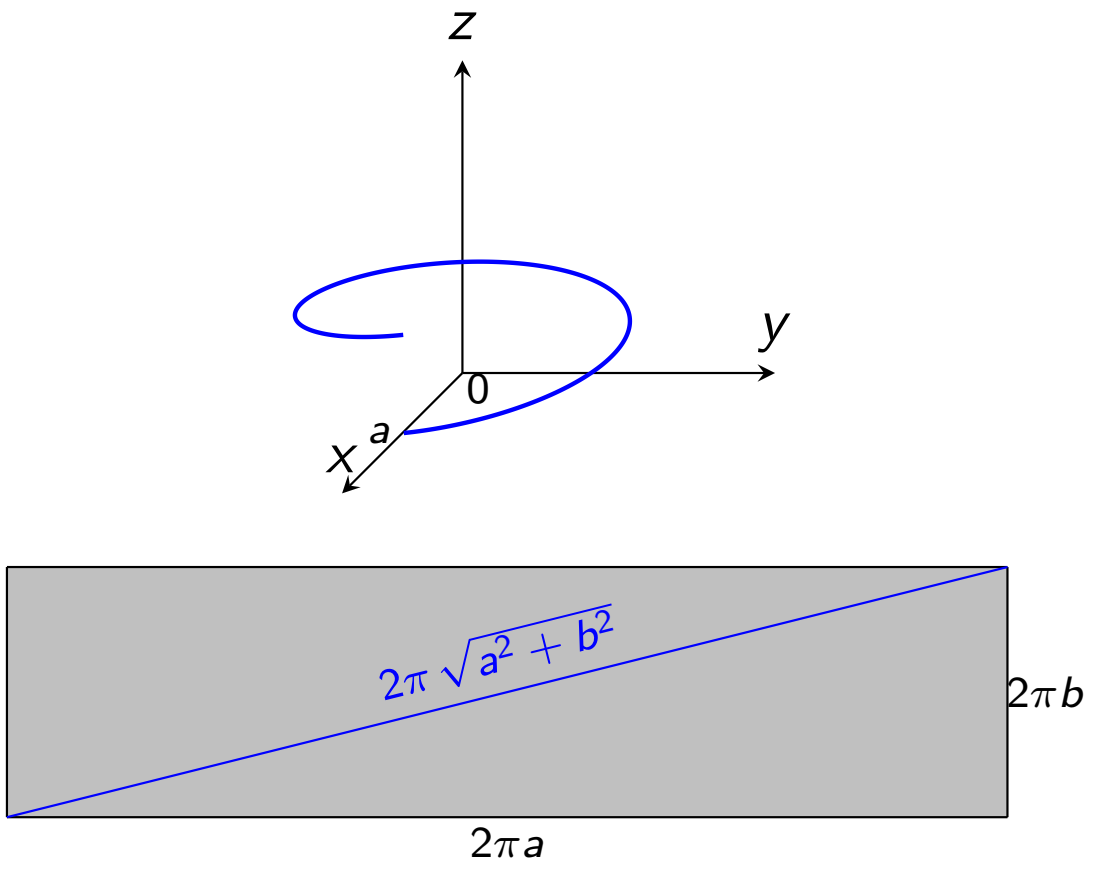


Figura : Sviluppando su un piano il cilindro sul quale l'elica è avvolta, l'arco di elica si sviluppa lungo una diagonale di un rettangolo i cui lati sono $2\pi a$ e $2\pi b$.

Lunghezza di un grafico

Esercizio

Calcolare la lunghezza del grafico della funzione (di classe C^1) $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.

Il grafico di f è il sostegno della curva parametrizzata

$$x(t) = t, \qquad y(t) = f(t), \qquad t \in [a, b].$$

La lunghezza del grafico è allora data da:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt \tag{2}$$

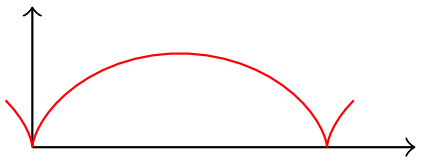
Esempio

Calcolare la lunghezza del grafico di $f(x) = \dfrac{x^2}{8} - \ln(x), \;\; x \in [1, 4]$.

Soluzione.

$\int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2}\, dx \;\; = \frac{15}{8} + \ln 4$

Esempio: Lunghezza della cicloide



Esercizio

Calcolare la lunghezza della cicloide:

$$C(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t)), \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{3}$$

$$|C'(t)| = \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} = r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}$$

Per la formula di bisezione: $\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} = \sin \frac{t}{2}$ $(t \in [0, 2\pi])$ si ha:

$$\text{Lunghezza} = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\, dt = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = 8r$$

Esempio guida di $\int_C f\, ds$: massa totale di un filo.

- Il sostegno della curva C è il modello matematico di un filo;
- La funzione $f = \mu$ rappresenta una densità lineare di massa. Questo significa che la massa Δm_i di un piccolo archetto di curva Δs_i attorno a un punto P_i è data da

$$\Delta m_i = \mu(P_i)\, \Delta s_i$$

  In breve: $\Delta m = \mu \Delta s$.
- Allora l'integrale

$$\int_C \mu\, ds = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{N} \mu(P_i)\, \Delta s_i$$

  si interpreta come la massa totale del filo la cui densità lineare di massa è μ.

1) Definizione di $\int_C f\, ds$ come integrale (di densità).

Sono assegnati:

- Una curva parametrizzata di classe $\mathcal{C}^1$

$$[a,b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3 \qquad t \longmapsto C(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

- Una funzione continua $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, dove D contiene il sostegno della curva C: $\quad \mathrm{Im}\ C \subset D$.

Definizione

L'integrale di f lungo C è:

$$\begin{aligned} \int_C f(x,y,z)\, ds &= \int_a^b f(C(t))\, |C'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt \end{aligned}$$

Esempio di calcolo di $\int_C f\, ds$

Esempio

Sia C l'arco di curva (elica cilindrica) di equazioni parametriche

$$C(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Calcolare $\displaystyle\int_C z\, ds$. *(Massa totale se la densità di massa è $\mu(x,y,z) = z$ e quindi l'elemento di massa $dm = \mu ds = zds$).*

Soluzione Qui $f(x,y,z) = z$ e

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt = \sqrt{2}\, dt$$

Dunque

$$\int_C z\, ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\,\pi^2$$

Osservazione: la lunghezza è un caso particolare di $\int_C f\, ds$

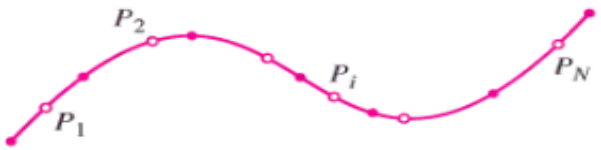
Osservazione

La lunghezza di una curva $[a, b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$ *di classe* $\mathcal{C}^1$

$$L(C) = \int_a^b |C'(t)|\, dt \left(= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt \right)$$

è un esempio di integrale (di densità) curvilineo del tipo $\int_C f\, ds$*, dove* $f = 1$*.*

2) Definizione di $\int_C f\, ds$ come limite di somme



- Dividiamo il sostegno di C in N archi consecutivi $C_1, ..., C_N$;
- Consideriamo le somme (di Riemann)

$$\sum_{i=1}^{N} f(P_i)\, \Delta s_i \tag{4}$$

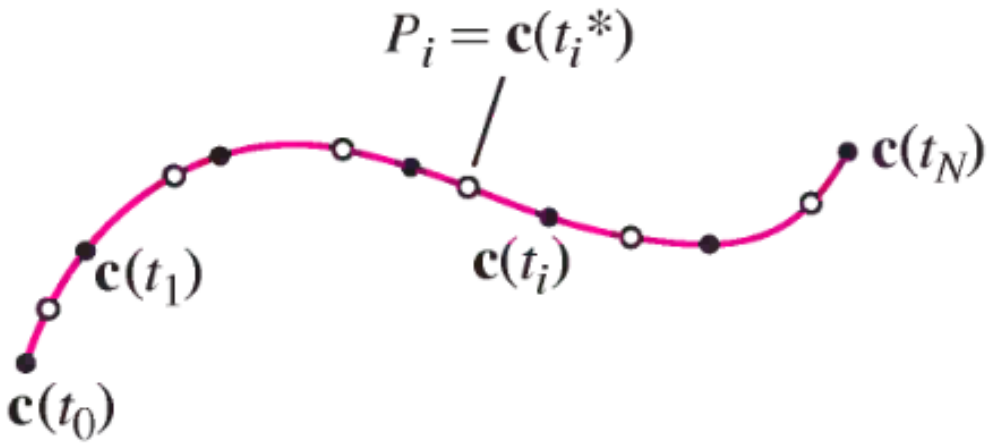
dove $\Delta s_i (> 0)$ è la lunghezza di C_i e P_i è un qualunque punto scelto in C_i.

Definizione (L'integrale curvilineo come limite di somme)

L'integrale di f lungo la curva C è il limite (se esiste) delle somme di Riemann (4) quando il massimo $|\Delta|$ delle lunghezze Δs_i tende a zero:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(P_i)\, \Delta s_i \tag{5}$$

Equivalenza delle due definizioni precedenti (Cenno)



($a = t_0 < \cdots < t_N = b$ è una partizione di $[a, b]$; $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ è scelto a piacere; $P_i = C(t_i^*)$; $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$; $C_i = C[t_{i-1}, t_i]$ è l'archetto di curva di estremi $C(t_{i-1})$ e $C(t_i)$.)

Per definizione, l'integrale (di Riemann) $\int_a^b f(C(t))\,|C'(t)|\,dt$ è limite delle somme di Riemann

$$\sum_{i=1}^{N} f(C(t_i^*))\,|C'(t_i^*)|\,\Delta t_i \approx \sum_{i=1}^{N} f(P_i)\,\Delta s_i$$

perché $\Delta s_i =$ lunghezza di $C_i \approx |C'(t_i^*)|\,\Delta t_i$.

Osservazione importante

Dalla interpretazione di $\int_C f\, ds$ segue che:

- L'integrale $\int_C f\, ds$ non è orientato: Se si inverte l'orientazione della curva C (in breve, si percorre la curva da $C(b)$ a $C(a)$), l'integrale di $\int_C f\, ds$ non cambia.
- L'integrale $\int_C f\, ds$ non dipende dalla parametrizzazione: Dato un cambio di parametro

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "C"] & \mathbb{R}^3 \\
& {[\alpha,\beta]} \arrow[u, "\gamma = C \circ \varphi"'] \arrow[ul, dashed, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

si ha $\int\limits_C f\, ds = \int\limits_\gamma f\, ds$.

Seconda applicazione fisica: carica totale su un filo.

- Il sostegno della curva C è il modello matematico di un filo;
- Sul filo sono presenti cariche elettriche e λ è la densità lineare di carica sul filo. Allora la quantità di carica ΔQ presente su un piccolo tratto di filo di lunghezza (positiva) Δs è

$$\Delta Q = \lambda(P)\,\Delta s$$

  dove P è un qualunque punto sul tratto di filo.
- Allora l'integrale $\int_C \lambda\, ds$ si interpreta come la quantità totale di carica elettrica sul filo.

Terza applicazione fisica: baricentri di linee

Sia μ la densità lineare di massa.Questo significa che l'elemento di massa è $dm = \mu ds$. La seguente definizione sarà resa plausibile più avanti (Slide: baricentro di un sistema finito di punti materiali.)

Definizione

Il baricentro, o centro di massa, G della linea C è il punto le cui coordinate sono date da

$$x_G = \frac{\int_C x\,\mu\,ds}{\int_C \mu\,ds}, \qquad y_G = \frac{\int_C y\,\mu\,ds}{\int_C \mu\,ds}, \qquad z_G = \frac{\int_C z\,\mu\,ds}{\int_C \mu\,ds} \tag{6}$$

Se la densità di massa μ è costante, il baricentro si chiama anche centroide. In questo caso, posto $L = \int_C ds$ la lunghezza di C, si ha:

$$x_G = \frac{1}{L}\int_C x\,ds \qquad y_G = \frac{1}{L}\int_C y\,ds \qquad z_G = \frac{1}{L}\int_C z\,ds \tag{7}$$

Esercizio

Esercizio

Trovare le coordinate del baricentro della semicirconferenza γ di equazioni parametriche:

$$x(t) = R\cos t, \qquad y(t) = R\sin t, \qquad t \in [0, \pi] \tag{8}$$

Per motivi di simmetria, il baricentro si deve trovare sull'asse y. Le sue coordinate (x_G, y_G) sono date, per definizione, da:

$$x_G = \frac{1}{L}\int_\gamma x\, ds, \qquad y_G = \frac{1}{L}\int_\gamma y\, ds$$

dove L è la lunghezza della curva. Nel nostro caso $L = \pi R$ e $ds = R\, dt$. Quindi:

$$x_G = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R\cos t\, R\, dt = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \cos t\, dt = 0$$

$$y_G = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R\sin t\, R\, dt = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \sin t\, dt = \frac{2}{\pi}R$$

Baricentro di un sistema finito di punti materiali

NOTAZIONI Denotiamo con S un sistema di punti materiali (P_i, m_i), $i = 1, ..., k$. (P_i è punto in cui è concentrata una massa $m_i > 0$). Sia $M = \sum_{i=1}^{k} m_i$ la massa totale.

Definizione

Il baricentro di un sistema S di punti materiali (P_i, m_i), $i = 1, ..., k$ è il punto G individuato dall'equazione vettoriale

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + m_k \overrightarrow{OP_k}}{M} = t_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + t_k \overrightarrow{OP_k}$$

dove $t_i = m_i/M$ e $M = \sum_{i=1}^{k} m_i$ è la massa totale.

OSSERVAZIONE Poiché $t_1 + \cdots + t_k = 1$, il baricentro G non dipende dalla scelta del punto origine O [Esercizio; slide successiva]. Quindi il baricentro G dipende solo dal sistema di punti materiali S, cioè dalle masse m_i e dalle loro posizioni P_i.

Soluzione dell'esercizio

Esercizio

Se $t_1 + \cdots + t_k = 1$ (e solo in questo caso) il punto G definito da

$$G = O + t_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + t_k\overrightarrow{OP_k},$$

non dipende dalla scelta di O. (Tale punto si scrive allora, in modo più intrinseco, come $G = t_1P_1 + \cdots + t_kP_k$ e si chiama combinazione affine dei punti $P_1, ..., P_k$.)

SOLUZIONE Se invece di O scegliamo un altro punto origine O', con lo stesso procedimento otteniamo il punto

$$\begin{aligned}
G' &= O' + t_1\overrightarrow{O'P_1} + \cdots + t_k\overrightarrow{O'P_k} \\
&= O' + t_1(\overrightarrow{O'O} + +\overrightarrow{OP_1}) + \cdots + t_k(\overrightarrow{O'O} + +\overrightarrow{OP_k}) \\
&= O' + (t_1 + \cdots + t_k)\overrightarrow{O'O} + t_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + t_k\overrightarrow{OP_k} \\
&= O' + \overrightarrow{O'O} + t_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + t_k\overrightarrow{OP_k} \\
&= O + t_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + t_k\overrightarrow{OP_k} = G
\end{aligned}$$

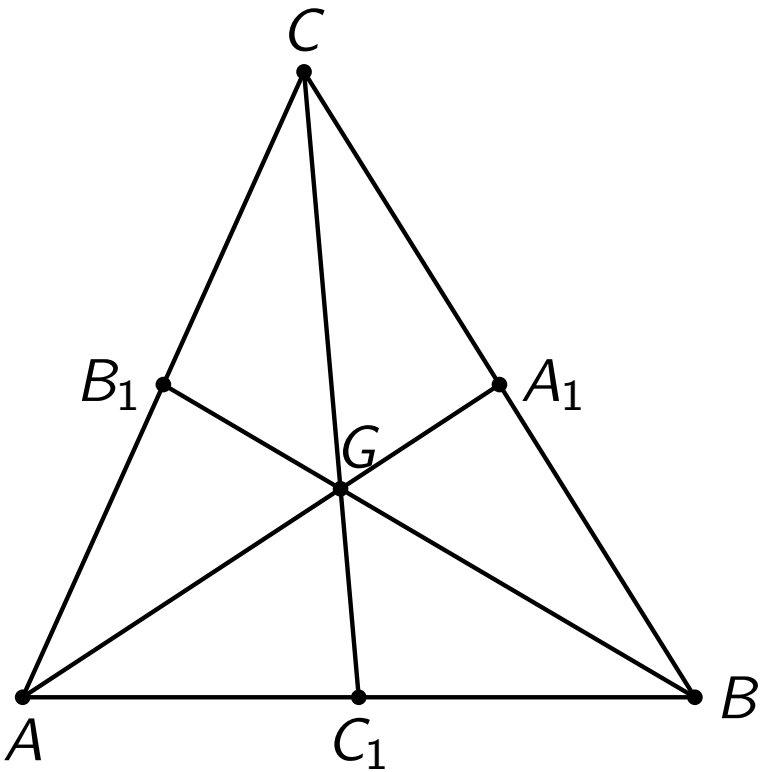
Motivazione euristica della definizione di baricentro di un filo

Per un sistema finito di punti P_i con masse m_i il baricentro G, per definizione, è determinato dall'equazione $\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OP_1}+\cdots+m_k\overrightarrow{OP_k}}{M}$. In un filo C, la massa dm di un archetto ds attorno a un punto P (non è concentrata in P, ma) è data da $dm = \mu ds$ e la massa totale è $M = \int_C dm = \int_C \mu ds$. Passando dal discreto al continuo (e dalle somme agli integrali), il baricentro G del filo è allora determinato da $\overrightarrow{OG} = \frac{\int_C \overrightarrow{OP}\mu ds}{\int_C \mu ds}$. Proiettando $\overrightarrow{OG} = (x, y, z)$ sugli assi si ottengono per le coordinate (x_G, y_G, z_G) di G le espressioni

$$x_G = \frac{\int\limits_C x\,\mu\,ds}{\int\limits_C \mu\,ds}, \qquad y_G = \frac{\int\limits_C y\,\mu\,ds}{\int\limits_C \mu\,ds}, \qquad z_G = \frac{\int\limits_C z\,\mu\,ds}{\int\limits_C \mu\,ds}$$

(Per approfondimenti: Tullio Levi-Civita, Ugo Amaldi, Lezioni di Meccanica Razionale, Zanichelli.)

Baricentro. (Approfondimenti.)



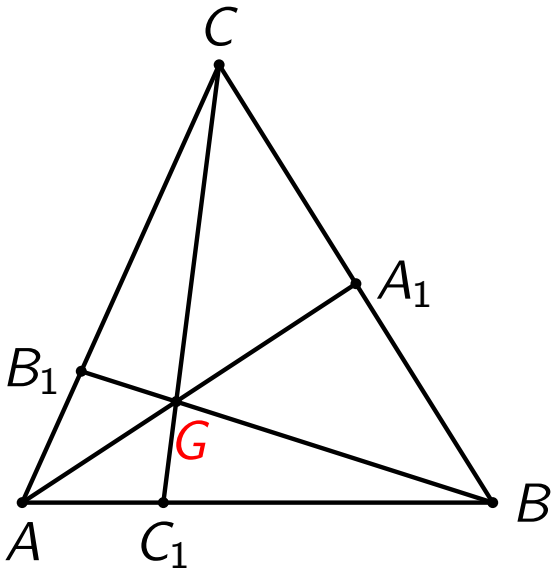
Problema

I vertici A, B, C di un triangolo siano caricati con tre masse uguali tra loro. Dimostrare che le tre mediane AA_1, BB_1, CC_1 passano per uno stesso punto, che è il baricentro G. Inoltre, $AG = 2GA_1$, $BG = 2GB_1$, $CG = 2GC_1$.

Teorema di Ceva (1678). (Approfondimenti.)

Teorema

Dati un triangolo ABC e tre punti A_1, B_1, C_1 rispettivamente sui lati BC, CA, AB, le tre rette AA_1, BB_1, CC_1 sono concorrenti se e solo se ai vertici del triangolo si possono assegnare masse m_A, m_b, m_C in modo tale che A_1, B_1, C_1 diventino baricentri rispettivamente delle coppie di punti materiali: B, m_B e C, m_C; C, m_C e A, m_A; A, m_A e B, m_B.



Teorema (Ceva)

In un triangolo ABC, i segmenti AA_1, BB_1, CC_1 che connettono i vertici con i punti medi dei lati opposti sono concorrenti se, e solo se,

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$