Introduzione al calcolo integrale

Indice:

- Integrale di Riemann.
- Alcune classi di funzioni Riemann-integrabili.
- Proprietà delle funzioni integrabili.
- Continuità della funzione integrale. Teorema della Media.
- Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.
- Metodi di integrazione (per parti, per sostituzione)
- Integrali generalizzati.

(15 novembre 2021)

I problemi del Calcolo Infinitesimale (Newton, *Method of Fluxions*, 1671)

Transition to the METHOD OF FLUXIONS.

55. And thus much for the Methods of Computation, of which I ſhall make frequent uſe in what follows. Now it remains, that for an Illuſtration of the Analytick Art, I ſhould give ſome Specimens of Problems, eſpecially ſuch as the nature of Curves will ſupply. But firſt it may be obſerved, that all the difficulties of theſe may be reduced to theſe two Problems only, which I ſhall propoſe concerning a Space deſcribed by local Motion, any how accelerated or retarded.

56. I. *The Length of the Space deſcribed being continually (that is, at all Times) given; to find the Velocity of the Motion at any Time propoſed.*

57. II. *The Velocity of the Motion being continually given; to find the Length of the Space deſcribed at any Time propoſed.*

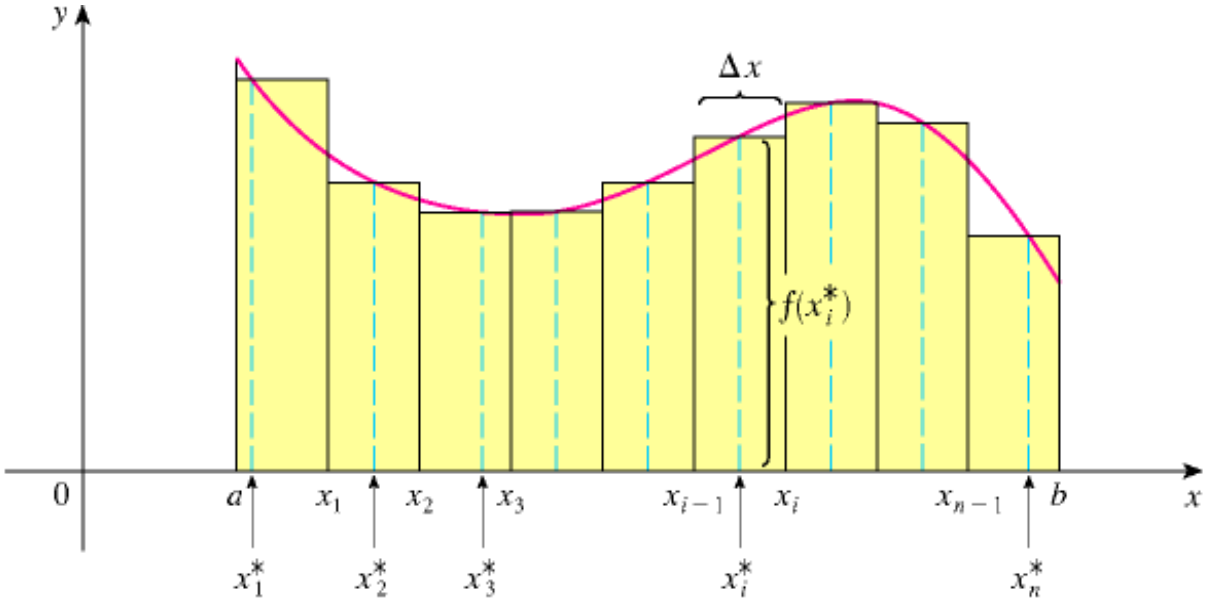
58. Thus in the Equation $xx = y$, if y repreſents the Length of the Space at any time deſcribed, which (time) another Space x, by increaſing with an uniform Celerity $\dot{x}$, meaſures and exhibits as

D 2 deſcribed:

1° *Problema. (Derivata) Data la lunghezza dello spazio percorso in ogni istante di tempo, determinare la velocità in ogni istante.*

2° *Problema. (Integrale) Data la velocità del moto a ogni istante, trovare la lunghezza dello spazio percorso a ogni istante di tempo.*

Integrale: "Somma totale di parti 'infinitesimali"



Definizione (Integrale come limite di somme (Riemann, 1854))

L'integrale di $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è (se esiste) il "limite":*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(x_i^*)\Delta x_i$$

dove $|\Delta| = \max_{i=1,\dots,m} \Delta x_i$ *è la massima lunghezza dei sotto-intervalli della partizione* $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Esempio di integrazione: calcolo dello spazio percorso

Esempio importante: Moto di un punto su un retta.

- Coordinata al tempo t: $s(t)$. Posizione iniziale: $s(t_0)$
- Velocità in t: $v(t) = s'(t)$ (Supponiamo $v(t)$ continua)
- Spazio percorso nell'intervallino di tempo Δt_i : $v(t_i^*)\Delta t_i$
- Spazio totale percorso da t_0 a t: $s(t) - s(t_0)$
  "Uguaglianza approssimata":

$$s(t) - s(t_0) \approx \sum_i v(t_i^*)\Delta t_i$$

Uguaglianza vera:

$$s(t) - s(t_0) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i v(t_i^*)\Delta t_i = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau$$

Formula di Newton-Leibniz

Dalla conclusione dell'esempio precedente

$$\int_{t_0}^{t} s'(\tau)\, d\tau \;=\; s(t) - s(t_0)$$

segue la:

Formula di Newton-Leibniz

Se $s(t)$ è una funzione la cui derivata è $v(t)$, cioè $s'(t) = v(t)$, allora

$$\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau \;=\; \int_{t_0}^{t} s'(\tau)\, d\tau \;=\; s(t) - s(t_0)$$

Questa formula (che dimostreremo di nuovo più avanti) è lo strumento fondamentale per il calcolo degli integrali.

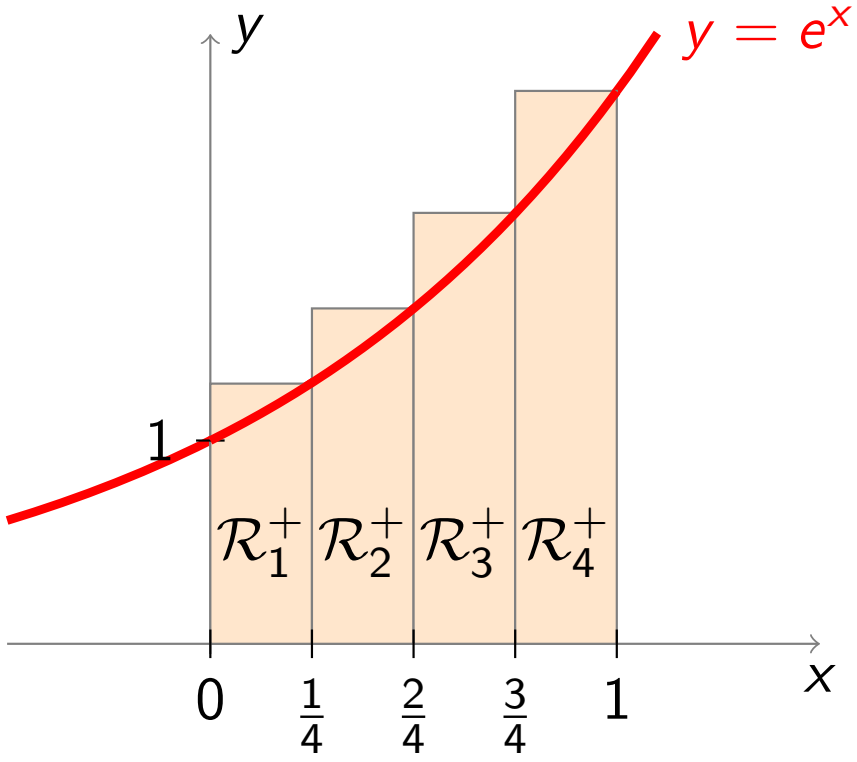
Teoria della integrazione (secondo Riemann)

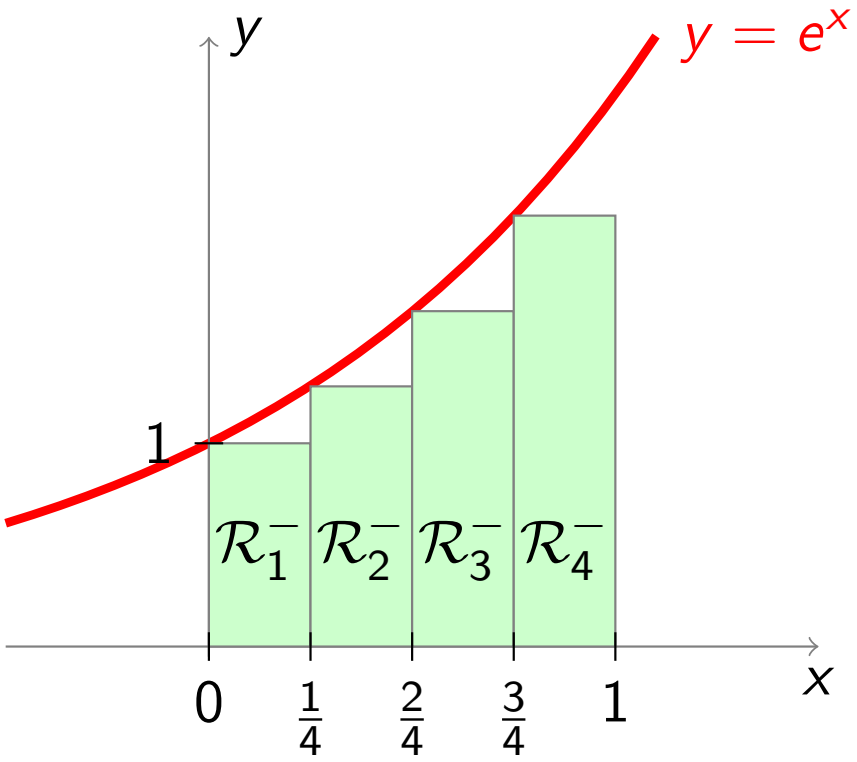
Nella teoria dell'integrazione secondo Riemann, consideriamo (almeno inizialmente) funzioni $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, soddisfacenti le condizioni seguenti:

1. f è limitata su $[a, b]$, cioè: esiste una costante reale K per la quale
$$|f(x)| \leq K$$
per ogni x in $[a, b]$;
2. Il dominio di integrazione è un intervallo $[a, b]$ compatto (cioè, chiuso e limitato).

Più avanti definiremo gli integrali generalizzati, che sono integrali di funzioni non limitate, o di funzioni il cui dominio non è limitato.

Somme inferiori e superiori per $f(x) = e^x$





Somme inferiori e superiori

- $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ limitata sull'intervallo compatto $[a, b]$.
- Sia P una partizione dell'intervallo $[a, b]$:
- Poniamo: $$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_m = b$$

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\} \\ M_i &= \sup\{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\} \\ S^-(f; P) &= \sum_{i=1}^{m} m_i(a_i - a_{i-1}) \\ S^+(f; P) &= \sum_{i=1}^{m} M_i(a_i - a_{i-1}) \end{aligned}$$

Le $S^-(f; P)$ e le $S^+(f; P)$ si chiamano rispettivamente somme inferiori e somme superiori della funzione f relative alla partizione P.

Integrale inferiore e superiore

- Si dimostra facilmente che ogni somma inferiore $S^-(f; P_1)$ è minore o uguale di ogni somma superiore $S^+(f; P_2)$, quali che siano le partizioni P_1, P_2.
- Per definizione, l'integrale inferiore $\underline{I}(f)$ e l'integrale superiore $\overline{I}(f)$ su $[a, b]$ sono rispettivamente i numeri

$$\begin{aligned} \underline{I}(f) &= \sup\{\text{Tutte le somme inferiori } S^-(f; P),\ P \in \mathcal{P}\} \\ \overline{I}(f) &= \inf\{\text{Tutte le somme superiori } S^+(f; P),\ P \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

  Qui $\mathcal{P}$ denota l'insieme di tutte le possibili partizioni di $[a, b]$.
- Ovviamente

$$\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$$

  Se $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, f si dice integrabile su $[a, b]$ e $\underline{I}(f)(= \overline{I}(f))$ si denota $\int_a^b f$ e si chiama integrale definito di f (su $[a, b]$).

Funzioni Riemann-integrabili e integrale definito

Definizione (Funzioni Riemann-integrabili e integrale di Riemann)

Una funzione $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, *limitata sull'intervallo compatto* $[a,b]$, *si dice integrabile (secondo Riemann) su* $[a,b]$, *se*

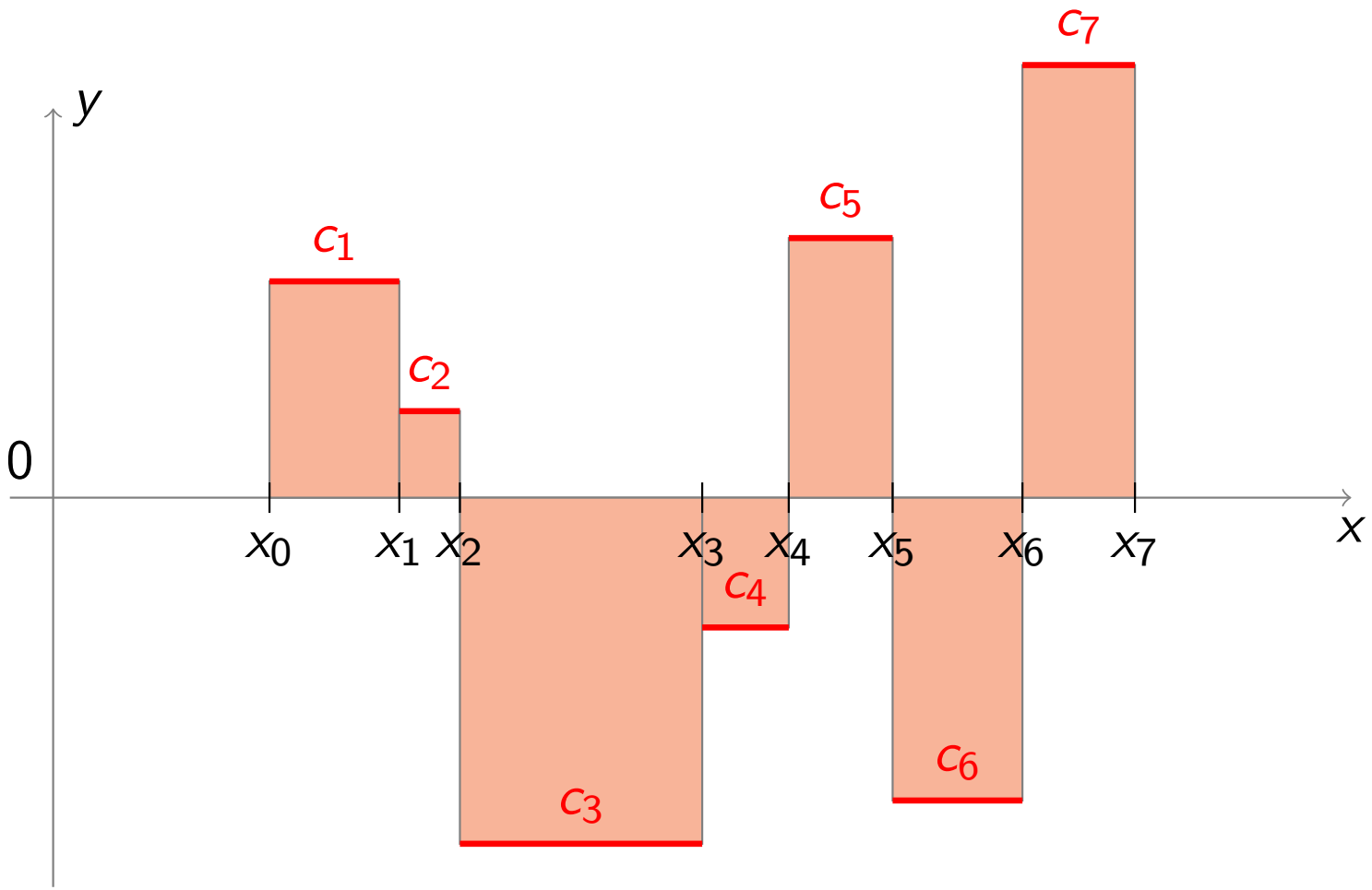
$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) \tag{1}$$

ossia se il suo integrale inferiore e il suo integrale superiore sono uguali. Se questo avviene, il comune valore (1) si chiama integrale di f *su* $[a,b]$ *e si denota* $\int_a^b f(x)\,dx$.

(Si dimostra che questa seconda definizione di integrale è equivalente alla definizione in termini di somme di Riemann.)

Primi esempi. Su un intervallo $[a,b]$:
(1) Ogni funzione costante K è integrabile: $\int_a^b K = K(b-a)$.
(2) Ogni funzione a gradini (slide successiva) è integrabile.

Le funzioni a gradino sono integrabili su $[a, b]$



$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})}$$

Un esempio di funzione limitata non integrabile

La funzione di Dirichlet $[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

è limitata, ma non è Riemann-integrabile, perché in ogni sottointervallo di $[0,1]$ ci sono sia numeri razionali sia irrazionali, e quindi tutte le somme inferiori valgono zero, mentre tutte le somme superiori valgono 1.
Si noti che questa funzione è discontinua in ogni punto del suo dominio.

Criterio di integrabilità

Proposizione (Criterio di integrabilità)

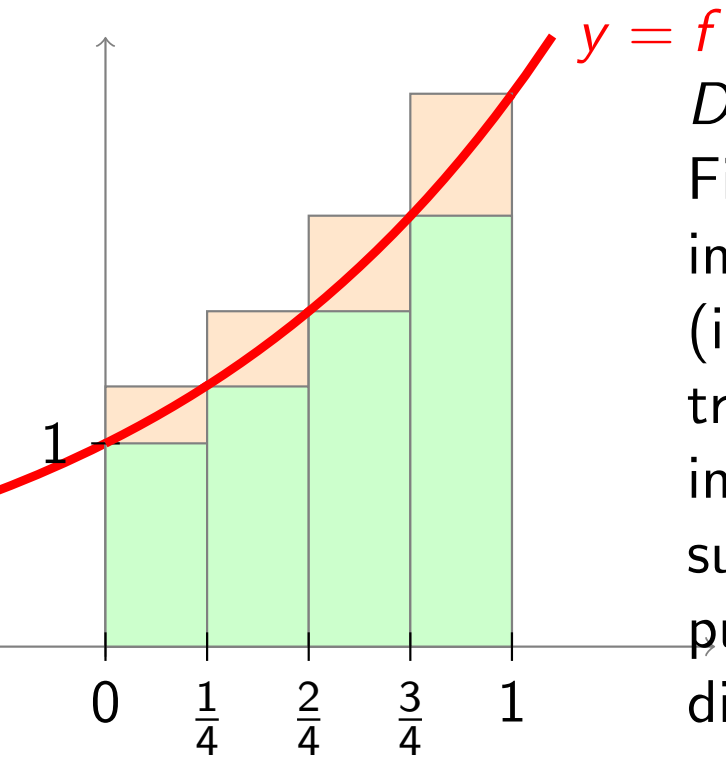
Una funzione $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, *limitata sull'intervallo compatto* $[a, b]$, *è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una partizione* P *tale che*

$$S^{+}(f; \mathrm{P}) - S^{-}(f; \mathrm{P}) \leq \varepsilon \tag{2}$$

Esempio: le funzioni monotòne sono integrabili su $[a, b]$

Teorema (Integrabilità delle funzioni monotòne)

Ogni funzione monòtona su un intervallo compatto $[a, b]$*, è integrabile su* $[a, b]$*.*



Dimostrazione. Supponiamo f crescente. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Consideriamo partizioni con intervalli di uguale ampiezza $\delta_n = (b - a)/n$ (in figura, $[a, b] = [0, 1]$, $n = 4$). La differenza tra una somma superiore e una somma inferiore è: $S^+ - S^- = [f(b) - f(a)]\delta_n$, Per n sufficientemente grande, questa differenza si può rendere minore di ε. Quindi, per il criterio di integrabilità, f è integrabile.

Funzioni continue su un intervallo compatto di $\mathbb{R}$

Un teorema fondamentale (dimostrazione nel sito del corso):

Teorema (Integrabilità delle funzioni continue sui compatti)

Se f è una funzione reale continua su un intervallo compatto $[a, b] \subset \mathbb{R}$, allora f è integrabile su $[a, b]$.

Più in generale:

Teorema (Integrabilità delle funzioni con un numero finito di punti di discontinuità)

Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione limitata e supponiamo che l'insieme dei punti di discontinuità di f sia finito. Allora f è integrabile.

Proprietà dell'integrale

NOTAZIONE: $\boxed{\mathcal{R}[a,b]}$: spazio delle funzioni Riemann-integrabili su $[a,b]$.

(1) Se $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}[a,b]$.

(2) Linearità. Per ogni $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$, e per ogni numero reale λ, si ha

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx$$

$$\int_a^b \lambda f_1(x)\, dx = \lambda \int_a^b f_1(x)\, dx$$

In breve: l'operatore di integrazione

$$\mathcal{R}[a,b] \xrightarrow{\int_a^b} \mathbb{R}, \qquad f \longmapsto \int_a^b f(x)\, dx$$

è lineare.

Proprietà dell'integrale.

(3) Monotonia. Se $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$ e $f_1(x) \leq f_2(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx$$

(4) Per ogni $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $c \in (a,b)$, le restrizioni di f agli intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$ sono integrabili e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(5) Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $M \in \mathbb{R}$ è un numero tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$, allora

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a)$$

Proprietà dell'integrale.

(6) Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$, allora anche $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

(7) Se $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, allora anche il loro prodotto $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.

Integrale orientato

Definizione (Integrale orientato)

Se $a > b$, si pone, per definizione,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Con questa definizione di integrale orientato, l'uguaglianza

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

vale per ogni scelta di a, b, c (cioè, qualunque sia la posizione reciproca di $a, b, c \in \mathbb{R}$).

Teorema della Media Integrale

Teorema (della Media Integrale)

Sia $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Denotiamo*

$$m = \inf\ f \qquad\qquad M = \sup\ f \tag{3}$$

l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f *su* $[a,b]$. *Allora*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M \tag{4}$$

Se inoltre f *è continua, esiste un punto* c *in* $[a,b]$ *tale che*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \tag{5}$$

Dimostrazione (Media Integrale)

Da $m \leq f(x) \leq M$ (per ogni $x \in [a, b]$) segue

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \tag{6}$$

ossia

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \tag{7}$$

Di qui segue subito la tesi (4).
Supponiamo ora f continua su $[a, b]$. Per le disuguaglianze (4), il numero

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{8}$$

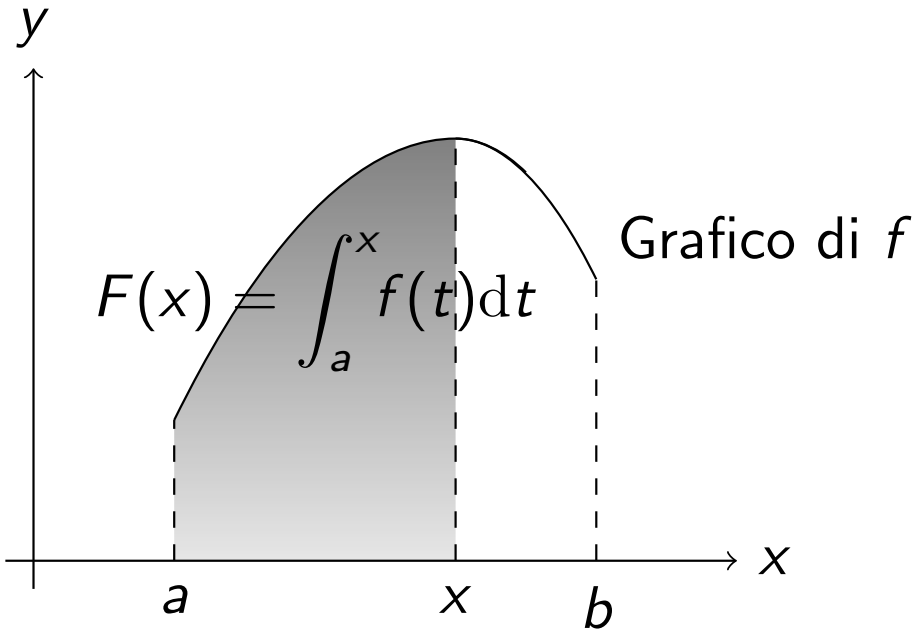
è compreso tra l'estremo inferiore m e l'estremo superiore M di f in $[a, b]$. Poiché f è continua, assume tutti i valori compresi tra il suo estremo inferiore e il suo estremo superiore. Quindi esiste un punto c tra a e b per il quale vale (5). Q.E.D.

La funzione integrale

Definizione

Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *integrabile su* $[a, b]$. *Si chiama* *funzione integrale di* f *la funzione* $[a, b] \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ *definita nel modo seguente: per ogni* $x \in [a, b]$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{9}$$



$F(x)$ = area sotto il grafico di f tra a e x.

Continuità della funzione integrale

Teorema (Continuità della funzione integrale)

Sia $f \in \mathcal{R}[a, b]$ (cioè, f Riemann-integrabile; non importa se continua no). Allora la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{10}$$

è continua su $[a, b]$.

Più precisamente, la dimostrazione di questo teorema assicura che F soddisfa una condizione di Lipschitz: esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che

$$|F(z) - F(w)| \leq K|z - w| \tag{11}$$

per ogni $w, z \in [a, b]$.

Dimostrazione (Continuità della funzione integrale)

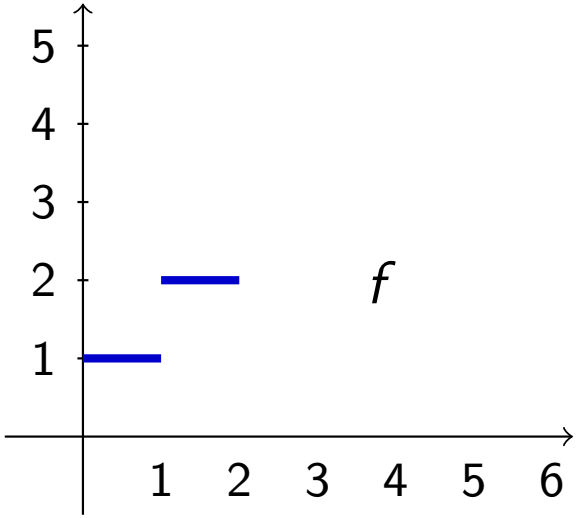
Dimostrazione. Per ipotesi f, essendo integrabile, è limitata: esiste una costante $K > 0$ per cui $|f(x)| \leq K$ per ogni $x \in [a, b]$. Sia $x_0 \in [a, b]$ arbitrario. Allora, per ogni $x \in [a, b]$:

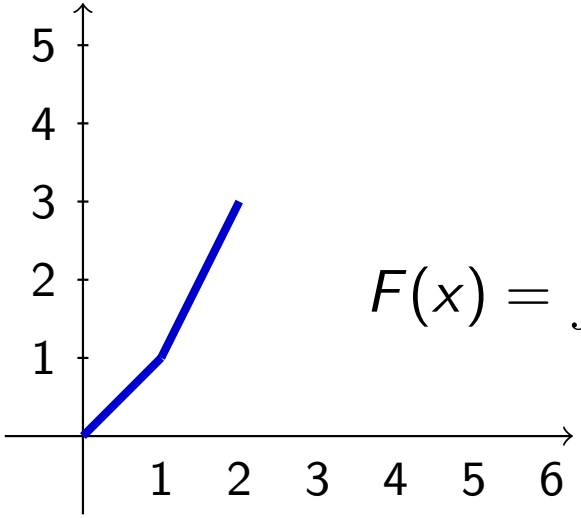
$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^x f \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^x |f| \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^x K \right| \\
&= K|x - x_0|
\end{aligned}$$

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, se $|x - x_0| < \delta = \varepsilon/K$, si ha $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$. Dunque F è continua in x_0. Q.E.D.

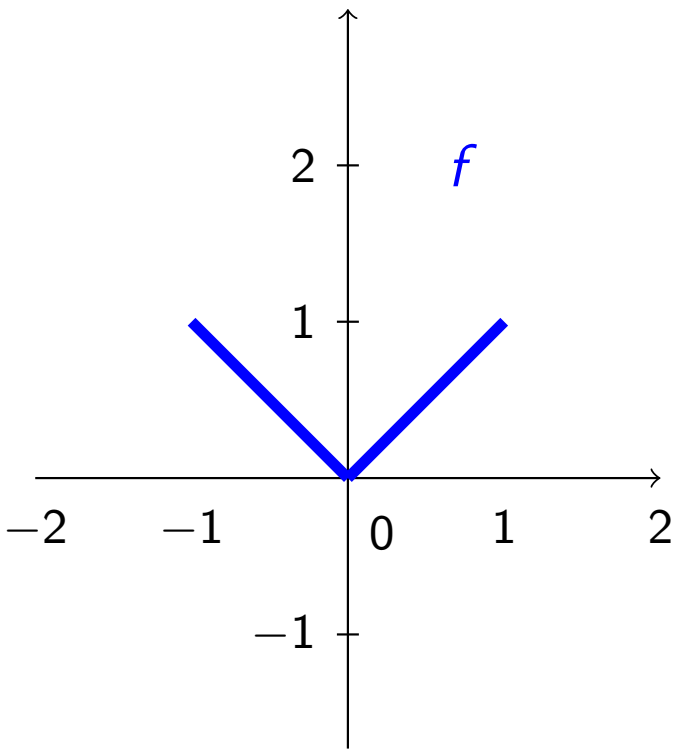
(**Nota.** F è addirittura uniformemente continua su $[a, b]$.)

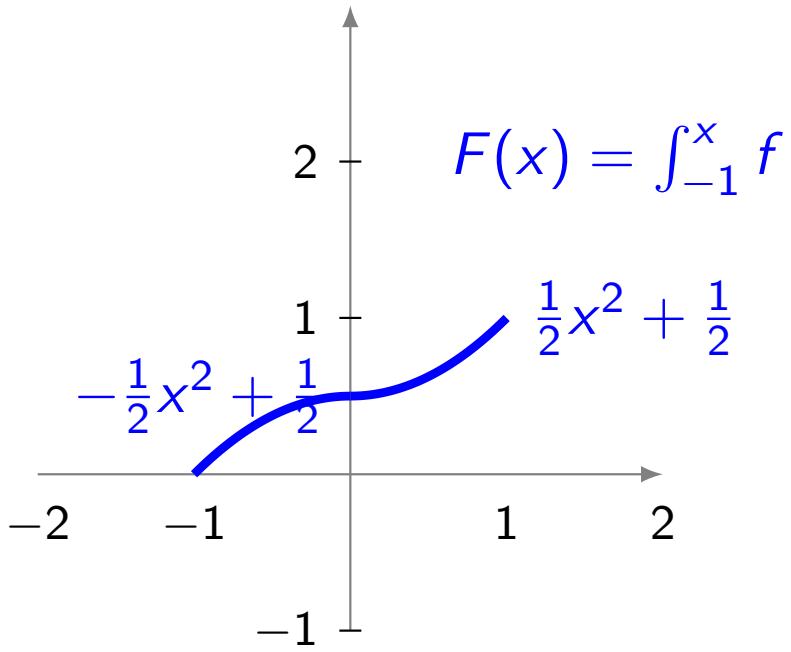
Funzione integrale. Esempio 1





Funzione integrale. Esempio 2





Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (TFCI)

Teorema (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale)

Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora:*

1. *La funzione integrale di* f
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{12}$$
è una antiderivata di f*, ossia è derivabile e* $F'(x) = f(x)$ *per ogni* x *in* $[a, b]$*:*
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \tag{13}$$

2. *Se* G *è una qualunque antiderivata di* f *su* $[a, b]$*, ossia* $G'(x) = f(x)$ *per ogni* x *in* $[a, b]$*, allora*
$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \tag{14}$$

Dimostrazione del Teorema Fondamentale

1) Fissiamo un punto x in $[a, b]$. Allora

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\Big] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c) \tag{15}$$

dove c è un opportuno punto tra x e $x+h$. La (15) segue dal Teorema della Media Integrale, applicato all'intervallo di estremi x e $x+h$. Quando h tende a zero, il punto c, compreso tra x e $x+h$, tende a x. Poiché f è continua, $f(c)$ tende a $f(x)$ e quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) \tag{16}$$

Dunque $F'(x) = f(x)$. Q.E.D.

Dimostrazione del Teorema Fondamentale (Continua)

2) Sia ora $G(x)$ una qualunque funzione derivabile tale che $G'(x) = f(x)$. Poiché

$$G'(x) = f(x) = F'(x)$$

le due funzioni $G(x)$ e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ hanno la stessa derivata sull'intervallo $[a, b]$. Quindi differiscono per una costante:

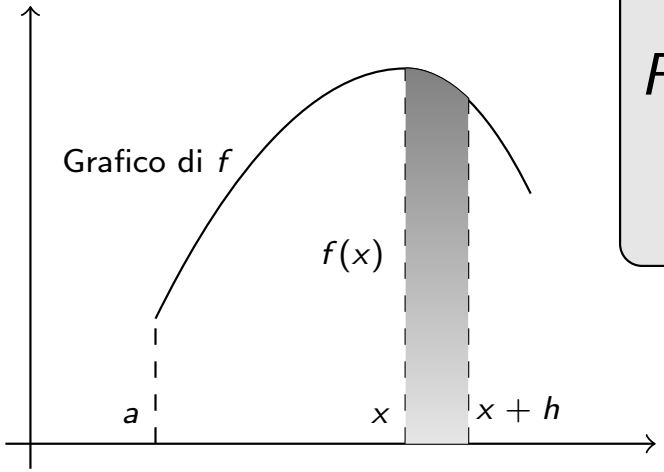
$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \tag{17}$$

Ponendo in questa uguaglianza prima $x = b$ e poi $x = a$ e sottraendo, si ottiene la tesi:

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= \Big[\int_a^b f(t)\,dt + c\Big] - \Big[\int_a^a f(t)\,dt + c\Big] && (18) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt && (19) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Dimostrazione del TFCI (in breve)



Supponiamo f continua. Definiamo:

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du$$
$$= \text{Area sotto il grafico di } f \text{ da } a \text{ fino a } x$$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\text{Area del 'rettangolino' grigio}}{\text{Base}}$$
$$= \frac{h\,f(x^\star)}{h} = f(x^\star) \to f(x) \quad (\text{per } h \to 0).$$

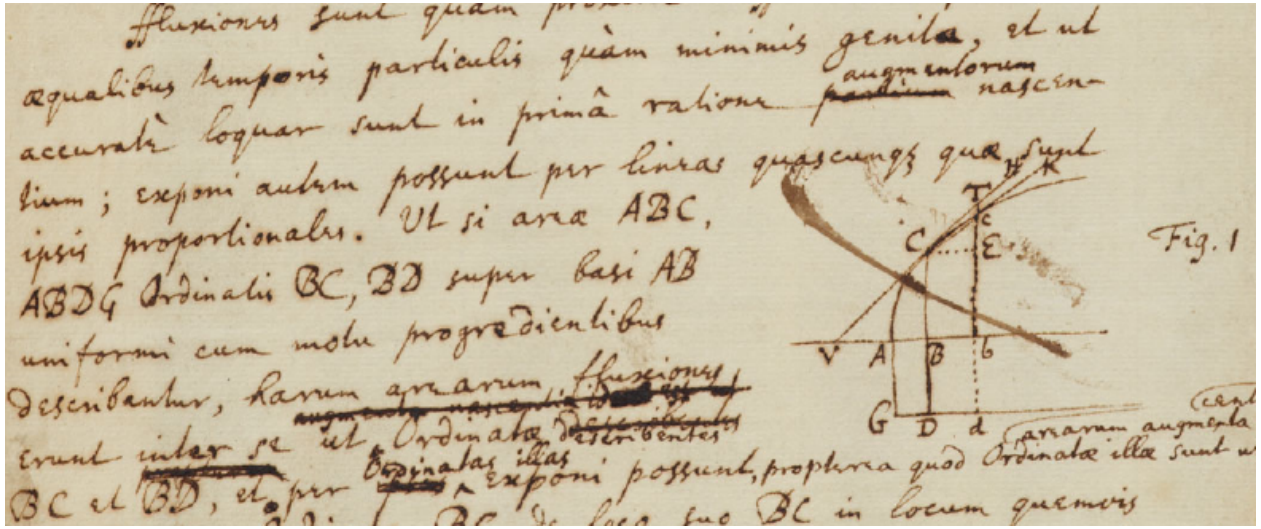
Esiste $x^* \in [x, x+h]$: Segue:

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Se f è continua,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(u)\,du\right] = f(x)$$

Newton, ‘De Quadratura Curvarum’



“Così, se le aree ABC , $ABDG$ sono descritte dalle ordinate BC, BD che avanzano con moto uniforme sulla base AB, le flussioni delle loro aree saranno tra loro in rapporto come le ordinate che descrivono BC e BD, e possono essere rappresentate per mezzo di quelle ordinate, perché quelle ordinate stanno tra loro come gli incrementi nascenti delle aree. (Isaac Newton, *De Quadratura Curvarum*, manoscritto del 1691-1692)

Integrazione per parti

Teorema (Integrazione per parti)

IPOTESI

$I \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, $I \xrightarrow{G} \mathbb{R}$ *derivabili su un intervallo* I, $F' = f$, $G' = g$.

TESI

1. *Formula di integrazione per parti per l'integrale indefinito:*

$$\int Fg = FG - \int fG \tag{20}$$

2. *Formula di integrazione per parti per l'integrale definito:*

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG \tag{21}$$

Integrazione per parti

Teorema (Integrazione per parti)

IPOTESI

$I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $I \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *derivabili su un intervallo* I.

TESI

1. *Formula di integrazione per parti per l'integrale indefinito:*

$$\int fg' = fg - \int f'g \tag{22}$$

2. *Formula di integrazione per parti per l'integrale definito:*

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g \tag{23}$$

Dimostrazione. (Integrazione per parti)

Dimostrazione. Dimostriamo la formula (22). Dalla regola di Leibniz

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{24}$$

ricaviamo $fg' = (fg)' - f'g$. Da qui leggiamo che una primitiva di fg' si ottiene sottraendo da fg (primitiva di $(fg)'$) una primitiva di $f'g$. In breve,

$$\int fg' = fg - \int f'g \tag{25}$$

La formula (23) è un'immediata conseguenza. Q.E.D.

Integrazione per sostituzione

Teorema (Integrazione per sostituzione)

Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $I \xrightarrow{\varphi} \varphi(I)$ una funzione derivabile, $\varphi(I) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua, F una primitiva di f. Allora la funzione $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, $x \in I$, ha come primitiva la funzione $F(\varphi(x))$. In breve, si scrive:

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx &= \left[\int f(y)\,dy\right]_{y=\varphi(x)} \\ &= F(\varphi(x)) + c \end{aligned}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

Formalmente, si pone $y = \varphi(x)$ e $dy = \varphi'(x)\,dx$. Le notazioni di Leibniz suggeriscono la regola meccanica
$\int f(y)\,dy = \int f(y(x))\,\frac{dy}{dx}\,dx$ che conduce al risultato giusto.

$$\begin{tikzcd}
\varphi(I) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "F"'] & B \\
I \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, dashed, "F \circ \varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

DIMOSTRAZIONE. Il teorema di derivazione delle funzioni composte assicura che la funzione composta $F \circ \varphi$ è derivabile su I e

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

Ne segue che una primitiva su I di $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ è $F(\varphi(x))$. Inoltre, siccome I è un intervallo, l'insieme $\int (f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ delle primitive di $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ (su I) è dato da:

$$\begin{aligned}
\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx &= \left[\int f(y)\,dy\right]_{y=\varphi(x)} \\
&= F(\varphi(x)) + c \qquad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Cambio di variabili negli integrali definiti

Teorema (Cambio di variabili negli integrali definiti)

IPOTESI

1. $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *continua*, $x \longmapsto f(x)$;
2. $[\alpha,\beta] \xrightarrow{\varphi} [a,b]$ *'cambio di parametro' derivabile*, $\vartheta \longmapsto \varphi(\vartheta) = x$. *Supponiamo:* $\varphi(\alpha) = a, \ \varphi(\beta) = b$

$$\begin{tikzcd}
{[\alpha,\beta]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "f \circ \varphi"'] & {[a,b]} \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

TESI

$$\int_\alpha^\beta (f(\varphi(\vartheta))\varphi'(\vartheta)\, d\vartheta = \int_a^b f(x)\, dx$$

Dimostrazione. (Cambio di variabili nell'integrale definito.)

Sia F una primitiva di f: $\quad F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$. Allora

$$\frac{d}{d\vartheta} F(\varphi(\vartheta)) = F'(\varphi(\vartheta))\, \varphi'(\vartheta) = f(\varphi(\vartheta))\, \varphi'(\vartheta)$$

Dunque $F(\varphi(\vartheta))$ è una primitiva di $f(\varphi(\vartheta))\, \varphi'(\vartheta)$.
Allora:

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta (f(\varphi(\vartheta))\varphi'(\vartheta)\, d\vartheta &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx \end{aligned}$$

Q.E.D.

Cambio di variabili negli integrali definiti: un esempio.

Esempio (Area di 1/4 di un cerchio di raggio 1)

Calcolare:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x = \sin\vartheta = \varphi(\vartheta) \qquad 0 \le x \le 1 \qquad 0 \le \vartheta \le \pi/2$

$dx = \varphi'(\vartheta)\,d\vartheta = \cos\vartheta\,d\vartheta$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\vartheta}\,\cos\vartheta\,d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\,d\vartheta$$

Poiché una primitiva di $\cos^2\vartheta$ è

$$\int \cos^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta),$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}\left[\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} = \pi/4$$

Integrali generalizzati (detti anche 'impropri')

Sono definiti come opportuni limiti di ordinari integrali di Riemann.
Un integrale si dice generalizzato in uno di questi casi:

1. Dominio di integrazione non limitato. Esempio: $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.
2. Funzione integranda non limitata. Esempio: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.
3. Entrambe le cose insieme. Esempio: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx$.

Definizione degli integrali generalizzati

Definizione (Integrale di funzione limitata su dominio non limitato)

Sia $[a, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *limitata su* $[a, +\infty)$ *non limitato.*
$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *significa:* $\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$

Definizione (Integrale di funzione non limitata su un dominio limitato)

Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *con dominio limitato* $[a, b]$*, non limitata in un intorno destro di* a*.*
$\int_a^b f(x)\,dx$ *significa:* $\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$

Funzione limitata su intervallo non limitato. Esempio.

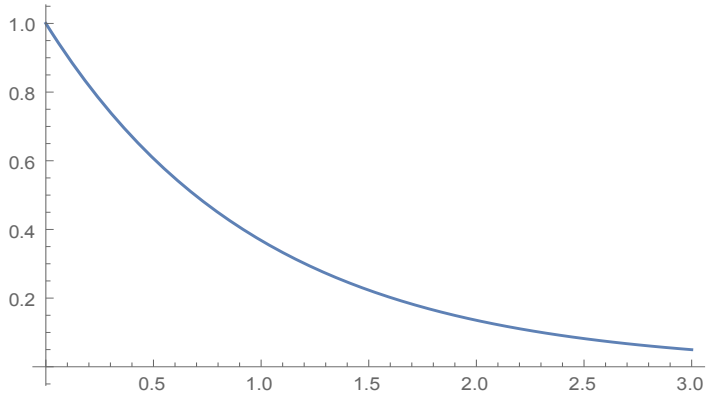


Figure : $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^t \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left(-e^{-t}+1\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Funzione limitata su intervallo non limitato. Esempio.

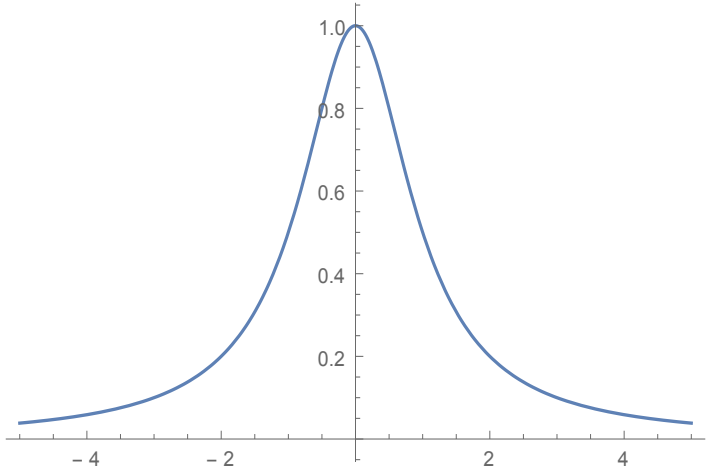


Figure : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} [\arctan x]_a^0 + \lim_{b\to+\infty} [\arctan x]_0^b \\
&= \pi/2 + \pi/2 \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Funzione non limitata su intervallo limitato. Esempio.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \lim_{a\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 \\
&= \lim_{a\to 0^+} 2 - 2\sqrt{a} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$.

Teorema (Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\, dx \qquad \begin{cases} \textit{diverge } (a\ +\infty) & \textit{se } a \leq 1 \\ \textit{converge} & \textit{se } a > 1 \end{cases}$$

Dimostrazione (Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$).

Se $a = 1$, abbiamo

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln 1) = +\infty$$

e quindi l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ vale $+\infty$, ossia è divergente.
Se $a \neq 1$, si ha:

$$\int_1^t \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{1-a}\left[x^{1-a}\right]_1^t = \frac{1}{1-a}(t^{1-a} - 1)$$

Allora:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-a}(t^{1-a} - 1) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Q.E.D.

Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di 0.

Teorema (Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di 0)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx \qquad \begin{cases} \textit{diverge } (a\ +\infty) & \textit{se } a \geq 1 \\ \textit{converge} & \textit{se } a < 1 \end{cases}$$

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema sulla integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$.

Criterio del confronto

Teorema (Criterio del confronto.)

Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano funzioni continue definite su una stessa semiretta $I = (a, +\infty)$ e soddisfacenti

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \tag{26}$$

Allora:

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx \tag{27}$$

In particolare:

1. *Se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ è convergente, anche $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente;*
2. *Se $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ non è convergente, anche $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ non è convergente;*

Criterio del confronto asintotico

Teorema (Criterio del confronto asintotico.)

Siano f e g funzioni continue e positive definite su una stessa semiretta $I = (a, +\infty)$. Supponiamo $f(x) \sim g(x)$ per $x \to +\infty$. Allora f è integrabile (in senso generalizzato) a $+\infty$ se, e solo se, g lo è.

Dimostrazione (Confronto asintotico)

Per ipotesi, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Questo significa: per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno $(M, +\infty)$ di $+\infty$ tale che, per ogni $x \in (M, +\infty)$,

$$1 - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 + \varepsilon$$

cioè

$$(1 - \varepsilon)g(x) \leq f(x) \leq (1 + \varepsilon)g(x) \tag{28}$$

Da (28) e dal Criterio del Confronto, segue subito la tesi. Infatti:
(a) Se $g(x)$ è integrabile a $+\infty$, da

$$f(x) \leq (1 + \varepsilon)g(x)$$

segue che anche $f(x)$ lo è; (b) Se $g(x)$ non è integrabile a $+\infty$, da

$$(1 - \varepsilon)g(x) \leq f(x)$$

segue che anche $f(x)$ non è integrabile a $+\infty$. Q.E.D.

Esercizi sulla convergenza di integrali generalizzati

Esercizio

Dire se i seguenti integrali sono convergenti (cioè, sono numeri reali), oppure no.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ *(Si può calcolare il valore numerico?)*
2. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ *(Si può calcolare il valore numerico?)*
3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{x^2}}\,dx$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x}\,dx$ *Più in generale:* $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^x}\,dx \qquad n \in \mathbb{N}.$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^{x^8}}\,dx$

Esercizio sulla convergenza di integrali generalizzati

Esercizio

Esiste l'integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{1+x^7}\,dx?$$

In altri termini: la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^7}$ *è integrabile in un intorno destro di* $x_0 = -1$*?*

SOLUZIONE Vicino a $x_0 = -1$, la funzione $g(x) = 1 + x^7$ è data da

$$g(x) = g(-1)+g'(-1)(x+1)+o(x+1) = 7(x+1)+o(x+1), \quad (x \to -1)$$

Allora, per $x \to -1^+$, $\frac{1}{1+x^7} \sim \frac{1}{7(x+1)}$, e quindi $\int_1^2 \frac{1}{1+x^7}\,dx$ non converge.

Calcolo di volumi di solidi ottenuti per rotazione

Esercizio

Calcolare il volume della sfera di raggio 1*, e dedurne il volume della sfera di raggio* r*.*

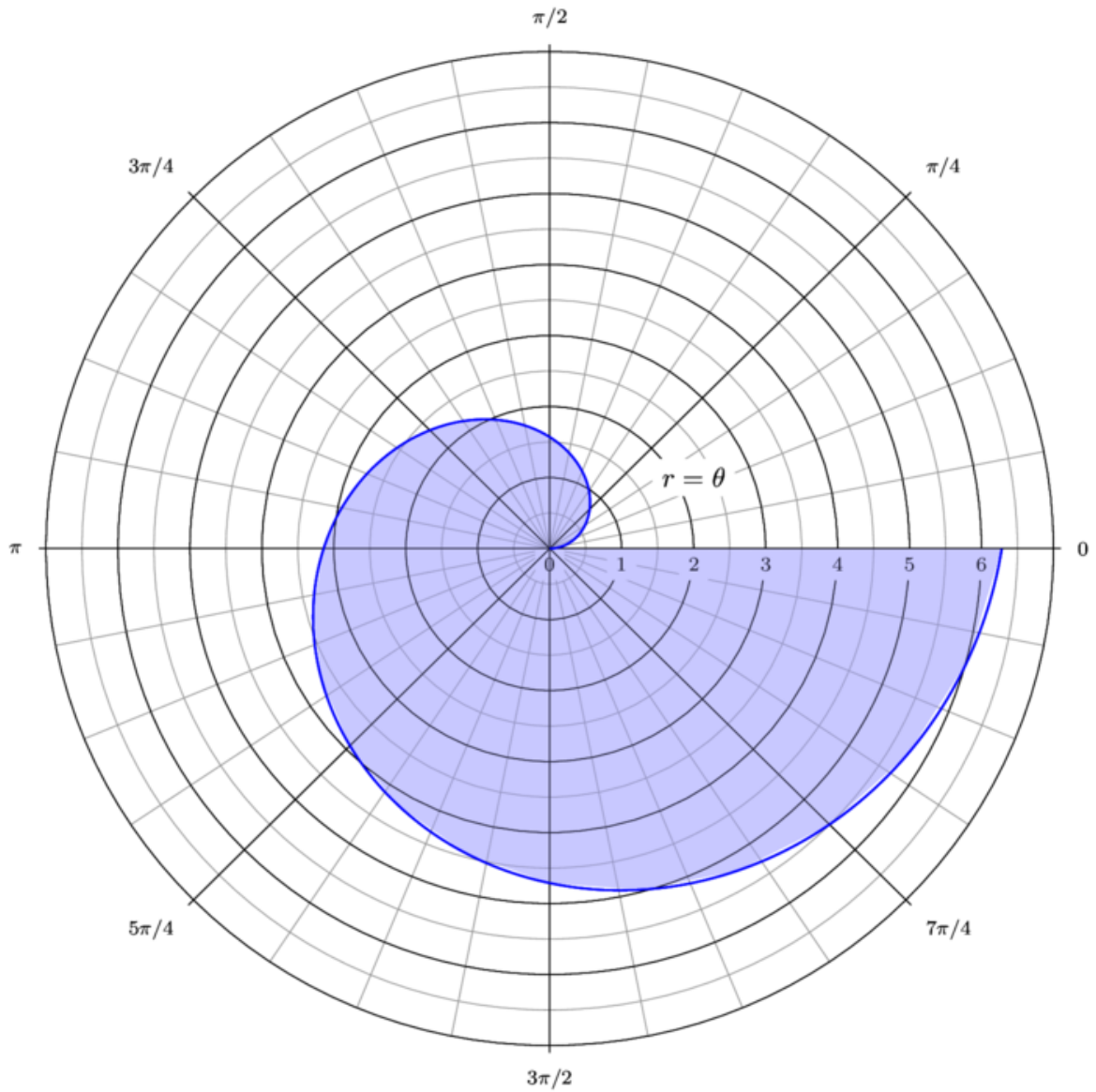
Soluzione Il volume della sfera di raggio 1 è dato da:

$$\int_{-1}^{1} \pi \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2) \, dx = \frac{4}{3}\pi$$

Ne segue che il volume della sfera di raggio r è

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

La spirale di Archimede. In coordinate polari: $r = \vartheta$

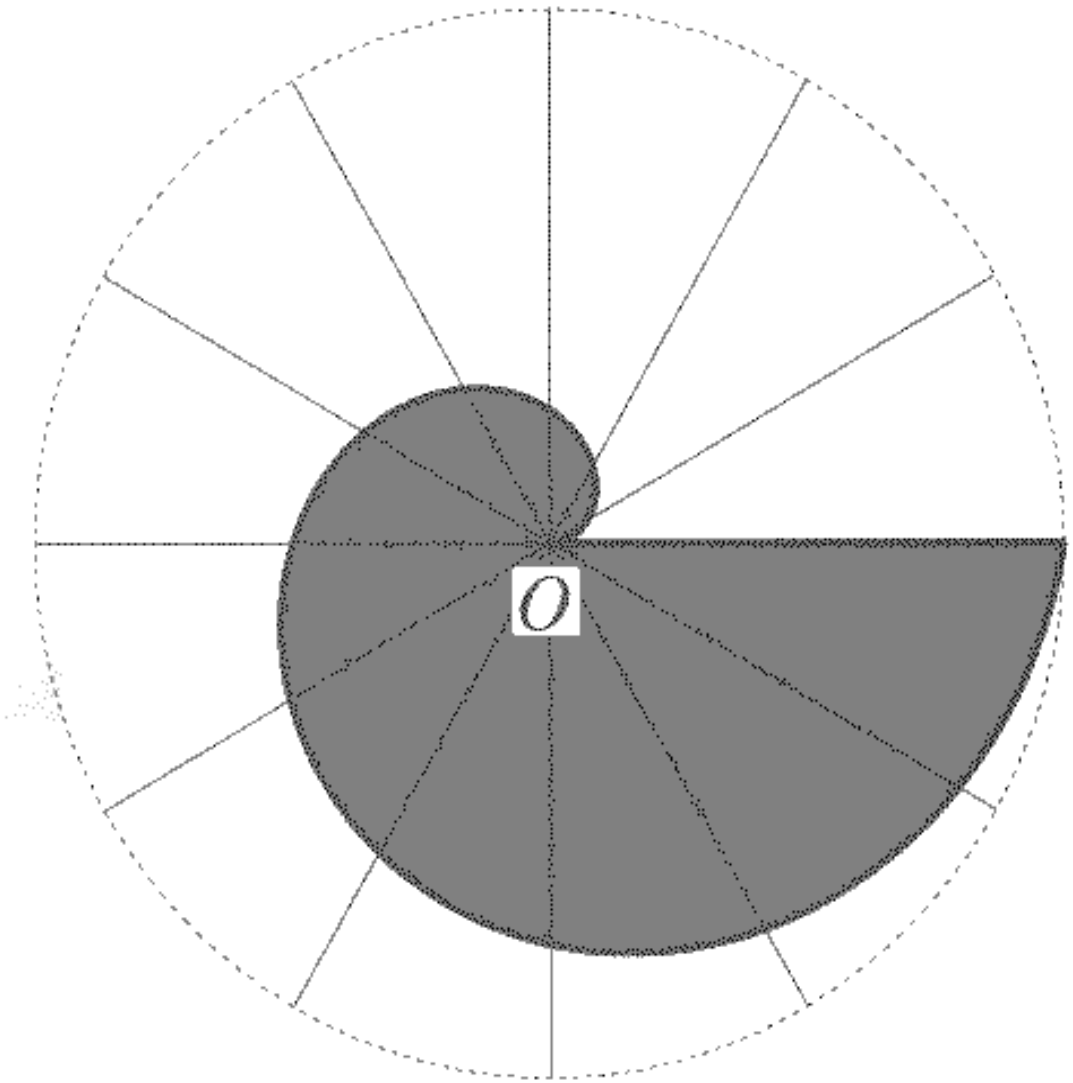


Calcolo di aree in coordinate polari: la spirale di Archimede.

Esercizio

Calcolare l'area della regione spazzata dal vettore posizione di un punto che descrive la spirale di Archimede $r = \vartheta$ durante il primo giro completo (cioè, da $\vartheta = 0$ a $\vartheta = 2\pi$).

Soluzione

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \vartheta^2 \, d\vartheta = \frac{4}{3}\pi^3$$

Area della spirale di Archimede $= \frac{1}{3}$ area del cerchio