Il prodotto vettoriale.

Dicembre 2022

Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Definizione

Nello spazio vettoriale euclideo orientato $\mathbb{R}^3$, data una coppia ordinata di vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è il vettore definito dalle proprietà seguenti:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *è ortogonale sia al vettore* $\mathbf{a}$ *sia al vettore* $\mathbf{b}$.
2. *La lunghezza di* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *è uguale all'area del parallelogramma generato da* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$:
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \vartheta \tag{1}$$
dove ϑ, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, *è l'angolo tra i vettori* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.
3. *Se* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$ *(*$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *non paralleli),* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *è una base positivamente orientata di* $\mathbb{R}^3$ *(orientata come* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$*).*

OSSERVAZIONE $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ se, e solo se, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono paralleli (cioè, multipli uno dell'altro).

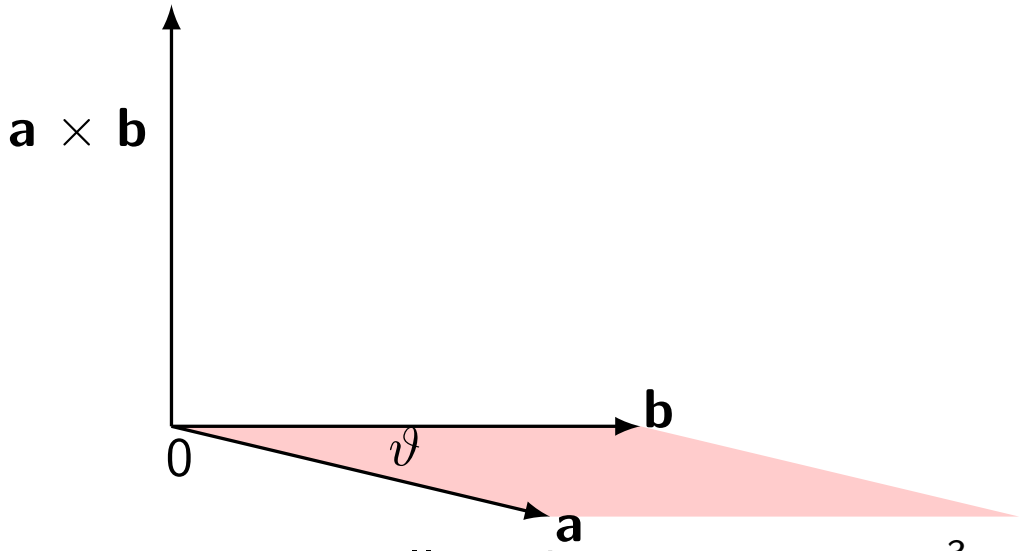
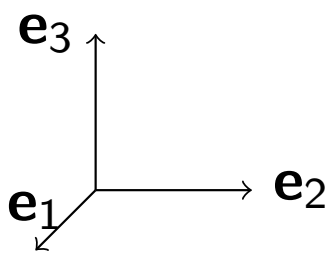


Figura : Il prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$.

Cosa significa che la terna ordinata $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ è una base positivamente orientata?

(1) Interpretazione fisico-intuitiva (non matematica): Detto ϑ l'angolo tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ $(0 \leq \vartheta \leq \pi)$, la semiretta di $\mathbf{a}$ si sovrappone a quella di $\mathbf{b}$ con una rotazione di ϑ in senso anti-orario, 'vista' da $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

(2) In modo rigoroso: $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}] > 0$, cioè il determinante della matrice che ha ordinatamente come righe (o colonne) questi tre vettori è positivo. (Si veda più avanti il determinante).



Esempi fondamentali di prodotto vettoriale.
$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \\
\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_2
\end{aligned}
$$

Proprietà del prodotto vettoriale

Teorema (Proprietà del prodotto vettoriale)

Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ ha le seguenti proprietà.

1. *Il prodotto vettoriale* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \longmapsto \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *è bilineare:*

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} &= \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} \\ (h\,\mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= h\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \qquad (h \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

   e analogamente nel secondo argomento.

2. *Il prodotto vettoriale è alternante:*

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

3. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ *se e solo se* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *sono paralleli.*

Componenti del prodotto vettoriale

Teorema

Il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *di due vettori* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *in* $\mathbb{R}^3$ *è il vettore di componenti:*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= \left(\det \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \det \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

Dimostrazione Poiché $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è una base ortonormale, la prima componente di un qualunque vettore $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ è data dal prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1$. (Infatti:
$(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + v_3\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = v_1$,
perché $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$.)
Calcoliamo allora la prima componente di $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

Dimostrazione (continuazione)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_1 = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} b_j \mathbf{e}_j \right) \cdot \mathbf{e}_1$$
$$= (a_2 b_3 \, \mathbf{e_2} \times \mathbf{e}_3 + a_3 b_2 \, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1$$
$$= [(a_2 b_3 - a_3 b_2) \, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3] \cdot \mathbf{e}_1$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

Il calcolo per le altre due componenti è lo stesso.

NOTA. Il conto si fa usando: le proprietà di bilinearità e alternanza; le uguaglianze $\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2} = \mathbf{e_3}$ e le altre simili. Consideriamo solo i termini $\mathbf{e_2} \times \mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_3} \times \mathbf{e_2}$, perché $\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_2} \times \mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_3} \times \mathbf{e_1}$, moltiplicati scalamente con $\mathbf{e_1}$ danno zero.

Esercizio

Esercizio

Equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}$ passante tre punti (distinti) P, Q, R.

Un vettore di giacitura del piano $\mathcal{P}$ è il prodotto vettoriale

$$(Q - P) \times (R - P) \tag{2}$$

Se $(Q - P) \times (R - P) = (a, b, c)$ e $P = (x_0, y_0, z_0)$, una equazione cartesiana di $\mathcal{P}$ è

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{3}$$

Calcolo di $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Un modo per calcolare $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ consiste nello sviluppare, lungo la prima riga, il determinante 'formale'

$$\det \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Infatti, sviluppando con la regola di Laplace:

$$\begin{aligned} \det & \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ = & \quad \mathbf{e}_1 \det \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \det \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ = & \quad (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned}$$

Il prodotto misto $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

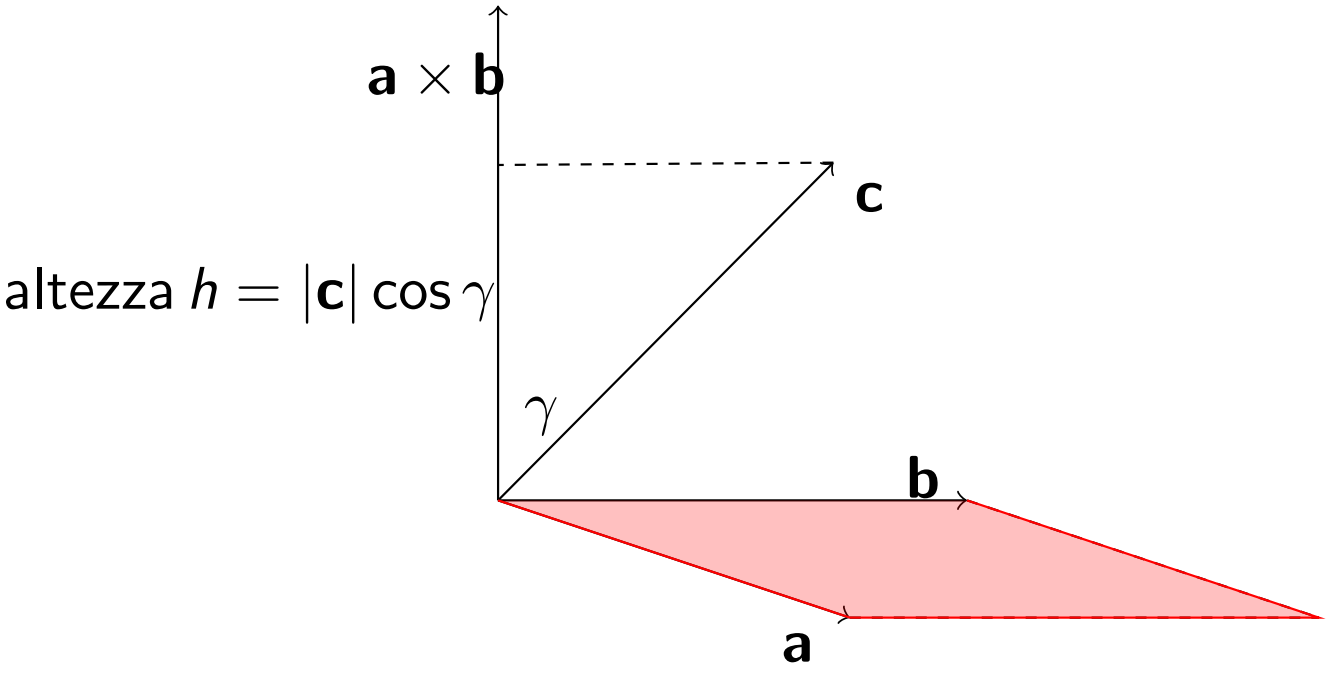


Figura : Il prodotto misto $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \cos\gamma$ è il volume orientato del parallelepipedo definito dagli spigoli $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Infatti, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ è l'area di base, e (il valore assoluto di) $|\mathbf{c}| \cos\gamma$ è l'altezza.

Conseguenza: Tre vettori sono complanari (linearmente dipendenti) se e solo se il prodotto misto $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ è nullo.

Il prodotto misto. Il determinante: caso 3×3

Il prodotto misto, ossia il volume con segno del parallelepipedo, è:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 \\ &= \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Questo numero è il determinante (di una matrice 3×3).
Si noti che:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} =$$

$$= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$$

Proprietà del determinante

Teorema (Proprietà del determinante)

Per il determinante di una qualunque matrice quadrata (2×2, 3×3, *in generale* $n \times n$), *valgono le seguenti proprietà.*

1. *Se si somma a una riga un multiplo di un'altra riga, il determinante non cambia.* (Proprietà di invarianza per scorrimento).
2. *Se si moltiplica una riga per un numero* λ, *anche il determinante risulta moltiplicato per* λ.
3. *Se si scambiano tra loro due righe, il determinante cambia segno* (Proprietà di alternanza).

Valgono anche le seguenti due proprietà, che seguono facilmente da quelle elencate sopra:
Se due righe sono uguali, il determinante è nullo;
Se una riga è costituita tutta da zeri, allora il determinante è nullo.

Invarianza per scorrimento

Interpretazione geometrica della proprietà di invarianza per scorrimento dell'area di un parallelogramma (o del volume di un parallelepipedo):

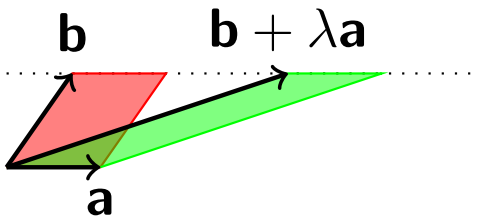


Figura : *Invarianza per scorrimento:* Sommare a un vettore un multiplo dell'altro, significa fare scorrere un lato parallelamente al lato opposto. L'area non cambia.

Regola di Laplace per il calcolo di un determinante

La regola di Laplace per sviluppare un determinante rispetto (ad esempio) alla prima riga, è la seguente:

$$\begin{aligned} & \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ = \quad & a_1 \det \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \det \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \det \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Infatti, sviluppando il secondo membro si ottiene

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 \qquad (5)$$

che è uguale al determinante.

Problema (Distanza tra due rette sghembe (cioè non complanari))

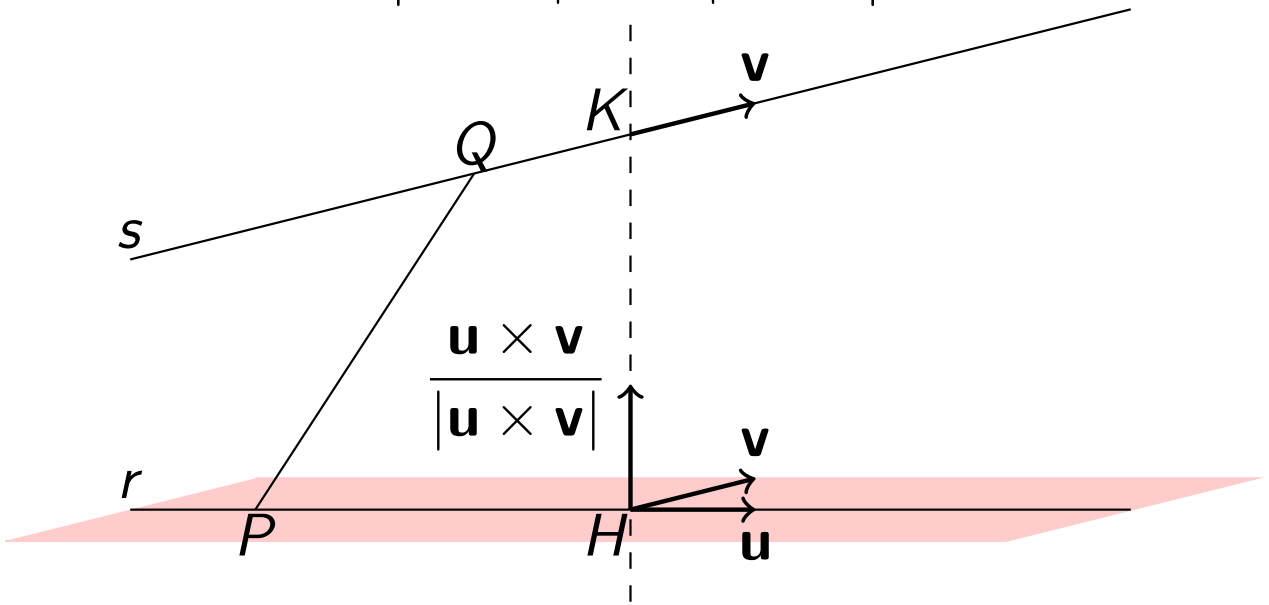
Nello spazio $\mathbb{R}^3$*, siano*

$$\begin{array}{lrcll} r: & X(t) & = & P + t\mathbf{u}, & t \in \mathbb{R} \\ s: & X(t) & = & Q + u\mathbf{v}, & u \in \mathbb{R} \end{array}$$

due rette sghembe. Trovare la distanza tra di esse.

Soluzione La distanza è data da

$$\left| \frac{(P - Q) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} \right| \tag{6}$$



Esercizio

Esercizio (Proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $W = Span(\mathbf{w})$)

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, siano $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$. Decomporre $\mathbf{v}$ come

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

dove $\mathbf{v}_{\parallel} = P_W(\mathbf{v})$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ sulla retta di $\mathbf{w}$.

<u>Soluzione</u> Abbiamo: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 2.$
Quindi:

$$P_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w} = \frac{1}{2}(1, 0, 1) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Esercizio: angolo tra due vettori

Problema

Trovare il coseno dell'angolo tra due vettori.

Da

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos\vartheta \tag{7}$$

dove $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$ sono le lunghezze di $\mathbf{a}, \mathbf{b}$) e ϑ è l'angolo tra di essi. Dunque

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \tag{8}$$

In coordinate cartesiane ortogonali, se $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, la (8) si scrive:

$$\cos\vartheta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{9}$$

Esercizio: normalizzare un vettore

Esercizio

Normalizzare il vettore (non nullo) $\mathbf{n} = (a, b, c)$. *(Cioè, dividere* $\mathbf{n}$ *per la sua lunghezza).*

Il normalizzato del vettore non nullo $\mathbf{n} = (a, b, c)$ è

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} &= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) \\ &= (\cos\varepsilon_1, \cos\varepsilon_2, \cos\varepsilon_3)\end{aligned}$$

Le componenti di $\hat{\mathbf{n}}$ sono i coseni degli angoli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ che $\hat{\mathbf{n}}$ forma con $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$:

Esercizio: distanza di un piano dall'origine

Esercizio

Sia $\mathcal{P}$ un piano di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$. Calcolare la distanza di $\mathcal{P}$ dall'origine.

Se dividiamo entrambi i membri dell'equazione del piano per $|\mathbf{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ otteniamo l'equazione (che ovviamente rappresenta ancora lo stesso piano $\mathcal{P}$)

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z+\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0$$

$$x \cos \varepsilon_1 + y \cos \varepsilon_2 + z \cos \varepsilon_3 = \delta$$

dove si è posto $\delta = -d/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. In forma vettoriale:

$$X \cdot \hat{\mathbf{n}} = \delta \tag{10}$$

La distanza di $\mathcal{P}$ dall'origine è $|\delta|$.

Esercizio: distanza di un punto da un piano

Esercizio

Nello spazio, riferito a un sistema di coordinate cartesiane, la distanza del punto $Z = (z_1, z_2, z_3)$ *dal piano* $\mathcal{P}$ *di equazione cartesiana*

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{11}$$

è data da:

$$d(Z, \mathcal{P}) = \left| \frac{az_1 + bz_2 + cz_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \tag{12}$$

Teorema di Pitagora

Teorema (Teorema di Pitagora)

Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *(spazio vettoriale euclideo) sono ortogonali,*

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 &= (\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + 2\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 \end{aligned}$$

Disuguaglianza di Schwarz

Teorema (Disuguaglianza di Schwarz)

Per tutti i $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \tag{13}$$

DIMOSTRAZIONE Se $\mathbf{w} = 0$, la (13) è ovvia. Altrimenti, scriviamo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp}$ con $\mathbf{v}_{\|}$ multiplo di $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}_{\perp}$ ortogonale a $\mathbf{w}$. Quindi $\mathbf{v}_{\|}$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{w}$. Per Pitagora,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 = \left\|\mathbf{v}_{\|}\right\|^2 + \|\mathbf{v}_{\perp}\|^2 &\geq \left\|\mathbf{v}_{\|}\right\|^2 \\ &= \left\|\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w}\right)\right\|^2 = \left|\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\right|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \\ &= \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|^2}{\|\mathbf{w}\|^2} \end{aligned}$$

Moltiplicando per $\|\mathbf{w}\|^2$ si ha la tesi. □

Calcolo di $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ con il determinante formale

Un modo per calcolare $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ consiste nello sviluppare, lungo la prima riga, il determinante 'formale'

$$\det \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{14}$$

Infatti, lo sviluppo lungo la prima riga con la regola di Laplace dà:

$$\begin{aligned} \det & \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ = & \quad \mathbf{e}_1 \det \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \det \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ = & \quad \left(\det \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \det \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$