Rette e piani nello spazio affine euclideo $\mathcal{E}^3$

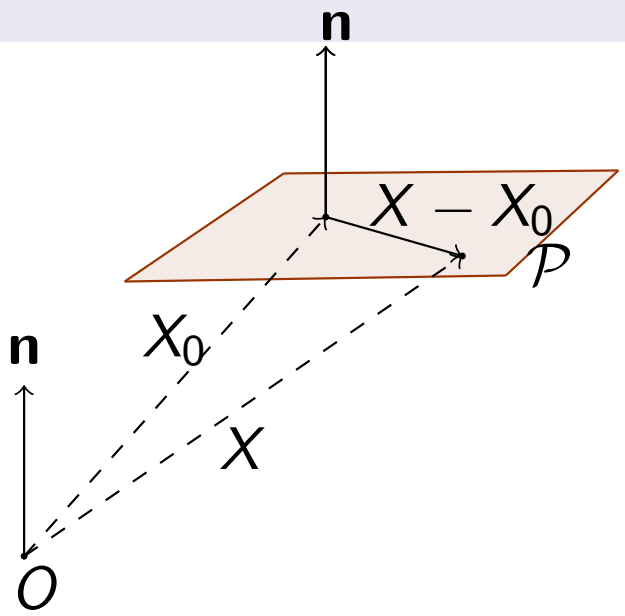
(Versione 9/12/2020)

Piano passante per un punto e ortogonale a un vettore (1)

Equazione vettoriale del piano passante per un punto e ortogonale a un vettore

Un punto X appartiene al piano $\mathcal{P}$ passante per il punto X_0 e ortogonale al vettore $\mathbf{n}$ se, e solo se, $X - X_0$ è ortogonale a $\mathbf{n}$. Dunque l'equazione vettoriale di $\mathcal{P}$ è:

$$\mathbf{n} \cdot (X - X_0) = 0 \tag{1}$$



Piano passante per un punto e ortogonale a un vettore (2)

Equazione cartesiana del piano passante per un punto e ortogonale a un vettore

Poniamo, in coordinate cartesiane:

$$\mathbf{n} = (a, b, c), \quad X = (x, y, z), \quad X_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

Allora, dall'equazione vettoriale $\mathbf{n} \cdot (X - X_0) = 0$ ricaviamo l'equazione cartesiana

$$a(x - x_0) + b(y - y_o) + c(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

Esempio

Equazione cartesiana del piano passante per $(1, 0, 2)$ *e ortogonale a* $(1, 1, 1)$*:*

$$1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 2) = 0, \quad \textit{ossia} \quad x + y + z - 3 = 0$$

Equazione cartesiana di un piano nello spazio

Teorema (Equazione cartesiana di un piano nello spazio)

Ogni piano nello spazio $\mathbb{R}^3$ si rappresenta con un'equazione cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{3}$$

dove almeno uno dei coefficienti a, b, c non è nullo. Viceversa, ogni equazione di questo tipo rappresenta un piano.
Il vettore $\mathbf{v} = (a, b, c)$ è ortogonale al piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ (e si chiama anche vettore di giacitura del piano).

Equazioni cartesiane di una retta nello spazio

Equazioni cartesiane di una retta

Equazioni cartesiane di una retta r nello spazio $\mathbb{R}^3$ sono:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{4}$$

dove $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono equazioni di due piani qualunque, la cui intersezione sia la retta r.

Retta passante per il punto P_0 e parallela a $\mathbf{v}$

Equazioni parametriche di una retta

Retta passante per il punto P_0 e parallela al vettore $\mathbf{v}$:

- Equazione parametrica di una retta r in forma vettoriale:

$$X = P_0 + t\mathbf{v} \quad t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

- Equazioni parametriche di una retta r in coordinate, posto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{v} = (l, m, n)$:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Rette parallele

Rette parallele

Due rette r e r' di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = x_0' + l't \\ y = y_0' + m't \\ z = z_0' + n't \end{cases}$$

sono parallele se hanno la stessa direzione, cioè i loro vettori di direzione (l, m, n) e (l', m', n') sono proporzionali:

$$\exists h \in \mathbb{R} \qquad l' = hl, \quad m' = hm, \quad n' = hn$$

Parallelismo tra piani

Piani paralleli

Due piani

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0 \tag{7}$$

sono paralleli se hanno la stessa giacitura, cioè se i loro vettori di giacitura (a, b, c) e (a', b', c') sono proporzionali:

$$\exists h \in \mathbb{R} \qquad a' = ha, \quad b' = hb, \quad c' = hc$$

Parallelismo retta/piano

Parallelismo retta/piano

Un piano $ax + by + cz + d = 0$ e una retta $r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

sono paralleli tra loro se il vettore (a, b, c) è ortogonale al vettore (l, m, n):

$$a\,l + b\,m + c\,n = 0 \tag{8}$$

Ortogonalità tra due piani e tra due rette

Ortogonalità tra due piani

Due piani $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono ortogonali tra loro se i loro vettori di giacitura (a, b, c) e (a', b', c') sono ortogonali:

$$a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0 \tag{9}$$

Ortogonalità tra due rette

Due rette r e r' di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = x_0' + l't \\ y = y_0' + m't \\ z = z_0' + n't \end{cases}$$

sono ortogonali tra loro se i loro vettori di direzione (l, m, n) e (l', m', n') sono ortogonali:

$$l\,l' + m\,m' + n\,n' = 0 \tag{10}$$

Ortogonalità retta/piano

Ortogonalità retta/piano

Un piano

$$ax + by + cz + d = 0$$

e una retta

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

sono ortogonali tra loro se (a, b, c) e (l, m, n) sono paralleli:

$$\exists h \in \mathbb{R} \qquad (a, b, c) = h\,(l, m, n) \tag{11}$$

Fascio di piani

Teorema

Sia r una retta dello spazio tridimensionale, di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{12}$$

I piani del fascio di sostegno r sono esattamente quelli la cui equazione è del tipo:

$$\lambda\,(ax + by + cz + d) + \mu\,(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \tag{13}$$

dove λ e μ sono numeri arbitrari (non entrambi nulli).

Esercizio sui fasci di piani

Esercizio

Scrivere un'equazione cartesiana per il piano che passa per il punto $P = (0, 1, 1)$ *e include la retta* r *di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 8z - 1 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

L'equazione del fascio di sostegno r è

$$\lambda(x - y) + \mu(x + y + 8z - 1) = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Il passaggio per $P = (0, 1, 1)$ impone

$$\lambda(0 - 1) + \mu(0 + 1 + 8 - 1) = 0, \quad \text{ossia} \quad -\lambda + 8\mu = 0$$

le cui soluzioni sono tutti i multipli della coppia ordinata $\lambda = 8$, $\mu = 1$. Un'equazione del piano cercato è

$$8(x - y) + 1(x + y + 8z - 1) = 0 \quad \text{ossia} \quad 9x - 7y + 8z - 1 = 0$$