# Una approssimazione allo "spazio della fisica classica." Spazi affini euclidei.

(Versione 02/12/2020)

# Lo spazio $\mathcal{E}^3$ (il piano $\mathcal{E}^2$) della geometria e della fisica classica come spazio affine euclideo.

- Ci sono due tipi di enti: i punti e i vettori.
- Il piano $\mathcal{E}^2$ (lo spazio $\mathcal{E}^3$) è costituito da punti, denotati con lettere maiuscole come $A, B, C, \ldots$ eccetera:

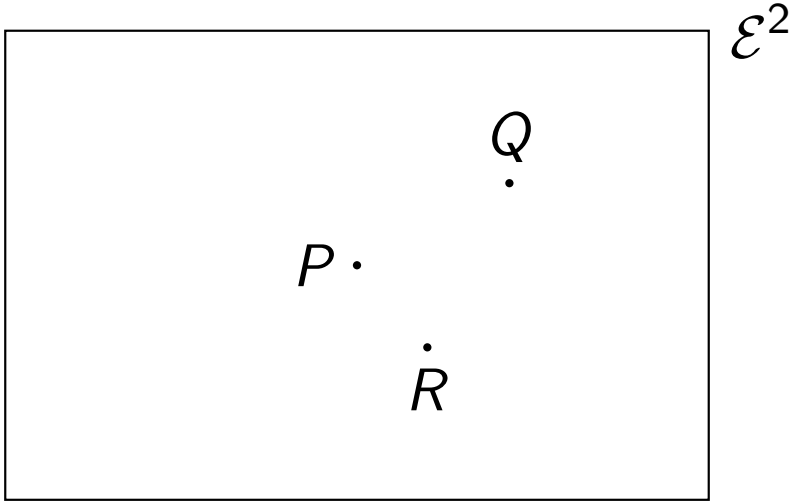



Figura : Il piano $\mathcal{E}^2$ come insieme di punti.

- I vettori – che si possono pensare come lunghezze orientate, o segmenti orientati – costituiscono uno spazio vettoriale $V$ (detto anche spazio vettoriale delle traslazioni di $\mathcal{E}^2$). Denotiamo i vettori con lettere minuscole: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$... eccetera.

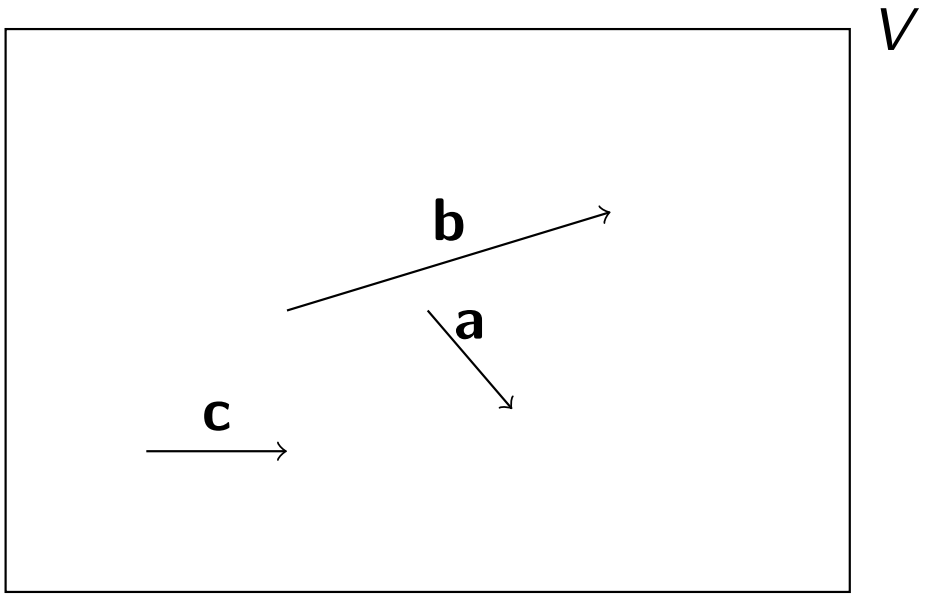
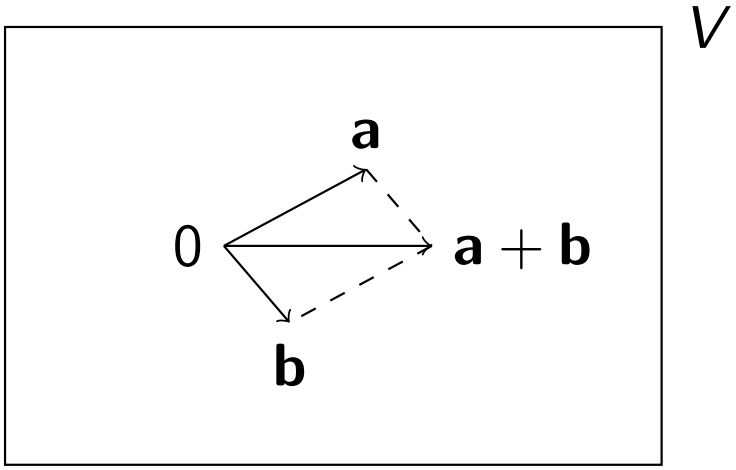
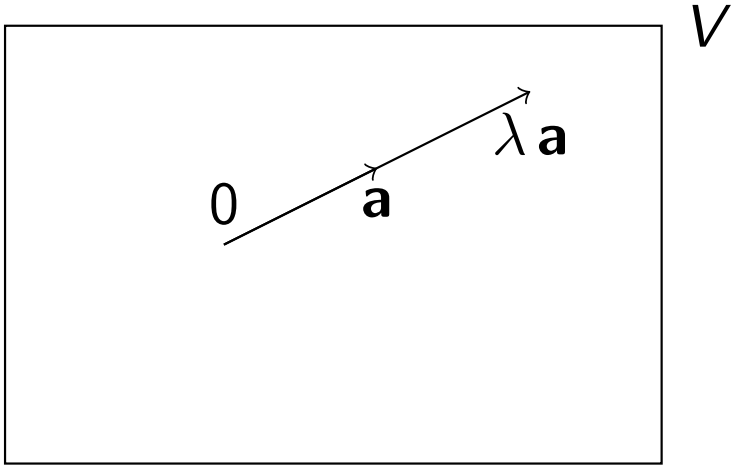



Figura : Lo spazio vettoriale $V$ costituito dai vettori (lunghezze orientate).

- È definita la somma di vettori e la moltiplicazione di un numero per un vettore:




Proprietà

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
3. $\mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0.$
5. $(\lambda + \mu)\,\mathbf{a} = \lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{a}$
6. $\lambda\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\,\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{b}$
7. $\lambda\,(\mu\,\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\,\mathbf{a}$
8. $1\,\mathbf{a} = \mathbf{a}$

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- A ogni coppia ordinata di punti $P, Q$ in $\mathcal{E}^2$ è associato uno e un solo vettore $\mathbf{a}$, denotato anche

$$\overrightarrow{PQ} \qquad \text{oppure} \qquad Q - P$$

Se $Q - P = \mathbf{a}$, si scrive anche:

$$Q = P + \mathbf{a}$$

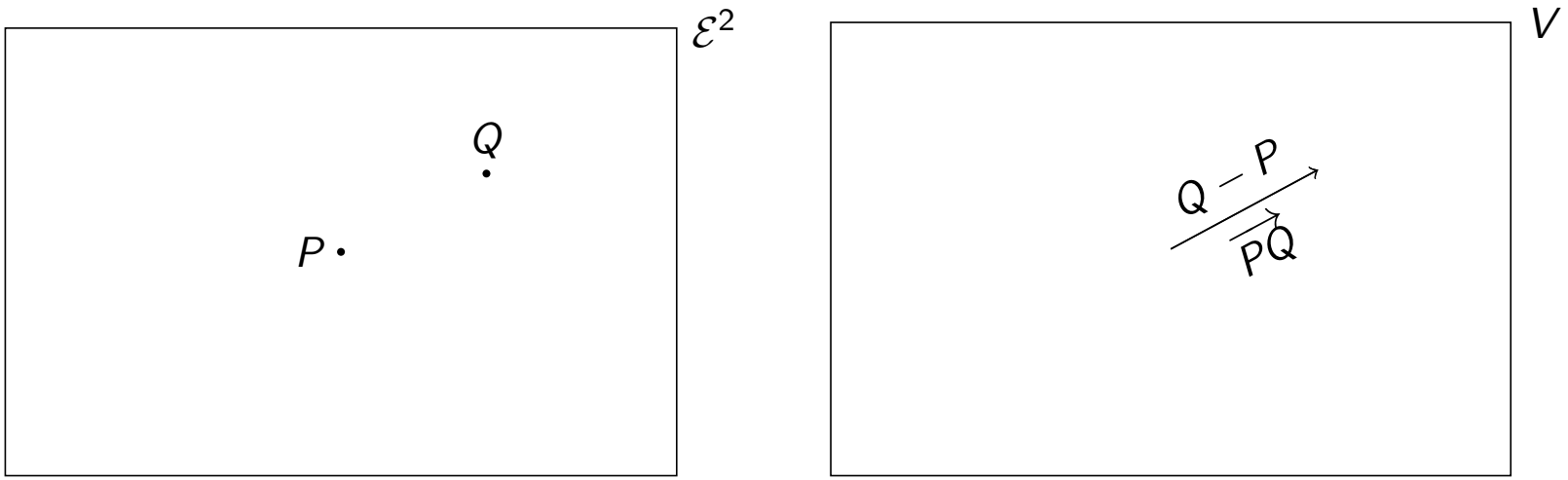



Figura : Il vettore $\overrightarrow{PQ}$ (denotato anche $Q - P$) è il vettore da $P$ a $Q$, ossia il vettore che rappresenta la traslazione che porta $P$ in $Q$.

Riassumendo, usiamo queste due notazioni:

1. La "differenza di due punti" $P, Q$ è un vettore:

$$\begin{aligned} \text{Punto} - \text{Punto} &= \text{Vettore} \\ Q - P &= \text{Vettore da } P \text{ a } Q \end{aligned}$$

2. La "somma di un punto e di un vettore" è un punto:

$$\begin{aligned} \text{Punto} + \text{Vettore} &= \text{Punto} \\ P + \mathbf{a} &= \text{Punto ottenuto da } P \text{ con la traslazione } \mathbf{a} \end{aligned}$$

# Identità di Chasles

Richiediamo che valga la seguente identità:

$$(P + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = P + (\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

che si legge in questo modo:
La traslazione di $\mathbf{a}$, seguita dalla traslazione di $\mathbf{b}$, è uguale alla traslazione di $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

# Prodotto scalare. Approccio intuitivo.

Supponiamo che nello spazio vettoriale $V$ dei vettori (del piano o dello spazio) sia fissata una "unità di misura" delle lunghezze.

**Definizione (Prodotto scalare. Spazio vettoriale euclideo.)**

*Il prodotto scalare, o prodotto interno, di due vettori* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *è il numero reale*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\vartheta \quad \text{(Definizione intrinseca di prodotto scalare)}$$

*dove* $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$ *denotano le lunghezze di* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *e* $\vartheta$ *è l'angolo compreso tra di essi. Uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare si chiama spazio vettoriale euclideo.*

**Definizione (Vettori ortogonali)**

*Due vettori* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *si dicono ortogonali se* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

# Proprietà del prodotto scalare

1. Il prodotto scalare è simmetrico:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

2. Il prodotto scalare è bilineare, cioè lineare (omogeneo e additivo) in entrambi gli argomenti:

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{1}$$

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b} \tag{2}$$

   e similmente (per simmetria) nel secondo argomento.

3. Il prodotto scalare è positivo:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 > 0 \qquad \text{se } \mathbf{a} \neq 0$$

# Osservazione sul prodotto scalare

In geometria elementare (in dimensione due e tre), si parte dal concetto di lunghezza e poi si definisce il prodotto scalare. Invece, in un contesto più astratto (ad esempio, in dimensione arbitraria) prima si definisce il prodotto scalare come una qualunque applicazione bilineare simmetrica definita positiva (cioè, con $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$ per ogni $\mathbf{a} \neq 0$), e poi si definisce la lunghezza $|\mathbf{a}|$ come

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

e si definisce l'angolo $\vartheta$ tra due vettori (non nulli) attraverso la formula

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

Questa definizione ha senso perché $-1 \leq \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \leq 1$ per la:

Disuguaglianza di Schwarz: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$

# Definizione generale di spazio vettoriale euclideo.

## Definizione (Spazio vettoriale euclideo. Prodotto interno.)

*Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale $V$ dotato di un prodotto scalare, o prodotto interno. Questo è una applicazione*

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

*bilineare, simmetrica e definita positiva.*

## Definizione (Lunghezza)

*In uno spazio vettoriale euclideo, la lunghezza di un vettore è definita come*

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

## Definizione (Ortogonalità)

*In uno spazio vettoriale euclideo, due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ si dicono ortogonali se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$*

# Spazio della fisica classica: Spazio affine euclideo

Riassunto: Lo spazio ordinario della fisica (e della geometria) classica è uno spazio affine euclideo $\mathcal{E}^3$:

**Definizione (Spazio affine euclideo $\mathcal{E}^3$)**

*Lo spazio affine euclideo $(\mathcal{E}^3, V)$ è costituito da:*

1. *Uno spazio (insieme) $\mathcal{E}^3$ di punti.*
2. *Uno spazio vettoriale $V$ euclideo (cioè, dotato di un prodotto scalare) di dimensione 3, detto spazio delle traslazioni di $\mathcal{E}^3$.*
3. *Una mappa $\mathcal{E}^3 \times V \longrightarrow \mathcal{E}^3$, $(P, \mathbf{a}) \longmapsto P + \mathbf{a}$.*

*Si richiedono queste proprietà:*

(a) *(Chasles)* $\quad (P + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = P + (\mathbf{a} + \mathbf{b})$

(b) $P + \mathbf{0} = P$ *per ogni punto $P$ (dove $\mathbf{0}$ è il vettore nullo).*

(c) *Per ogni coppia di punti $P, Q$ in $\mathcal{E}^3$ esiste in $V$ un unico vettore $\mathbf{a}$, denotato $Q - P$, tale che $P + \mathbf{a} = Q$.*

# Rappresentare punti con vettori (scelta un'origine).

La scelta di un punto origine $O$ in $\mathcal{E}^3$ definisce una corrispondenza biunivoca tra vettori e punti, per mezzo delle due mappe seguenti, l'una inversa dell'altra:

- $V \longrightarrow \mathcal{E}^3, \qquad \mathbf{a} \longmapsto O + \mathbf{a}$
- $\mathcal{E}^3 \longrightarrow V, \qquad P \longmapsto P - O \ (= \overrightarrow{OP})$ (vettore di posizione, o raggio vettore, del punto $P$ rispetto all'origine $O$.)

Si può dire che la scelta di un punto origine $O$ in $\mathcal{E}^3$ "vettorializza" lo spazio affine $\mathcal{E}^3$: in questo modo, i punti "si identificano" con i vettori. L'identificazione punto-vettore (fissata una origine), può essere molto utile per risolvere vari problemi, come illustrano i seguenti esempi.

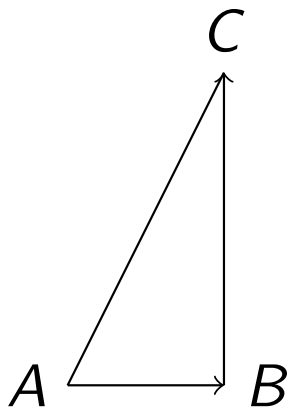
# Esercizio 1

## Esercizio (Teorema di Pitagora)

*Dimostrare il teorema di Pitagora.*

Soluzione. Se i cateti sono $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, l'ipotenusa è $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Allora:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|^2 &= (\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC}) + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 \end{aligned}$$



# Esercizio 2

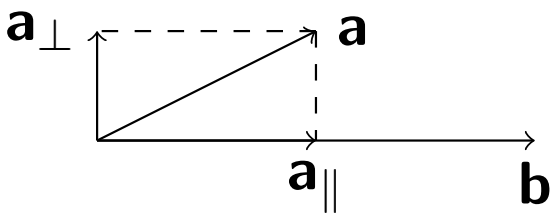
## Esercizio

*In un parallelogramma, la somma dei quadrati costruiti sulle diagonali è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui quattro lati.*

Soluzione. Chiamiamo $P, Q, R, S$ i vertici. Posto $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$ e $\overrightarrow{QR} = \mathbf{b}$, le diagonali sono date da $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Allora

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \\ &= 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

# Proiezione di un vettore lungo un altro




## Teorema (Proiezione di un vettore lungo un altro)

*Sia* $\mathbf{b} \in V$, $\mathbf{b} \neq 0$. *Ogni* $\mathbf{a} \in V$ *si scrive in modo unico come*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp \tag{3}$$

*con* $\mathbf{a}_\parallel$ *parallelo a (cioè, multiplo di)* $\mathbf{b}$ *e* $\mathbf{a}_\perp$ *ortogonale a* $\mathbf{b}$.
*Il vettore* $P_\mathbf{b}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}_\parallel$ *si chiama proiezione di* $\mathbf{a}$ *lungo (la retta di)* $\mathbf{b}$.
*Si ha:*

$$\mathbf{a}_\parallel = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\right)\mathbf{b} \tag{4}$$

*In particolare, se* $|\mathbf{u}| = 1$,

$$P_\mathbf{u}\,\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{u} \qquad (\textit{Se } |\mathbf{u}| = 1).$$

# Dimostrazione (Proiezione di un vettore su un altro)

Si deve avere $P_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = t\mathbf{b}$, per un opportuno scalare $t \in \mathbb{R}$. Il vettore $\mathbf{a} - P_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a} - t\mathbf{b}$ è ortogonale a $\mathbf{b}$ se e solo se

$$(\mathbf{a} - t\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b}) = 0$$

ossia (per bilinearità)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - t(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = 0$$

Questa è un'equazione di primo grado in $t$. Poiché $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \neq 0$ (perché $\mathbf{b} \neq 0$), ha un'unica soluzione

$$t = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}$$

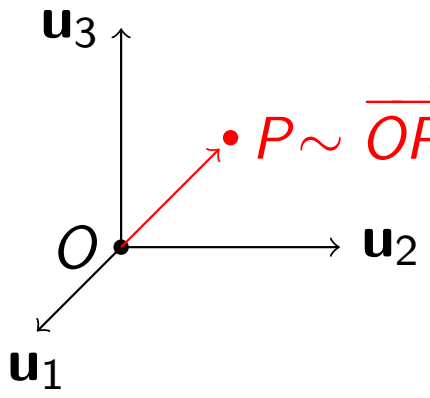
Dunque, la proiezione ortogonale di $\mathbf{a}$ lungo $\mathbf{b}$ è

$$P_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\right)\,\mathbf{b} \tag{5}$$

$\square$

# Come si introducono le coordinate cartesiane ortogonali

$\mathcal{E}^3 \sim \mathbb{R}^3$




$P \sim \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 \sim (x_1, x_2, x_3)$

1. Si fissa un punto origine $O$.
2. Si fissa una base ortonormale di vettori $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. (Vettori due a due ortogonali, ciascuno di lunghezza 1).
3. Ogni punto $P \in \mathcal{E}^3$ si identifica con il vettore $\overrightarrow{OP}$, che si scrive, in modo unico, come ($x_1\mathbf{u}_1 = P_{u_1}(\overrightarrow{OP})$ eccetera):
$$\overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3$$
4. La terna $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dà le coordinate cartesiane ortogonali del punto $P$.

# Il prodotto scalare in coordinate cartesiane ortogonali

**Teorema**

*Fissiamo una base ortonormale* $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. *Siano*

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3, \qquad \mathbf{b} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + b_3\mathbf{u}_3$$

*Allora*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3) \cdot (b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + b_3\mathbf{u}_3) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \, \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \, \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3
\end{aligned}$$

# Osservazione importante.

## Esercizio

*Sia* $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ *una base ortonormale. Allora, per ogni vettore*

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3$$

*si ha:*

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

*In altri termini, ogni vettore* $\mathbf{a}$ *si scrive:*

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3$$

# Esercizio

**Esercizio (Proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $W = Span(\mathbf{w})$)**

*Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, siano $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$. Decomporre $\mathbf{v}$ come*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

*dove $\mathbf{v}_{\parallel} = P_W(\mathbf{v})$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ sulla retta di $\mathbf{w}$.*

<u>Soluzione</u> Abbiamo: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 2.$
Quindi:

$$P_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w} = \frac{1}{2}(1, 0, 1) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$

# Esercizio: angolo tra due vettori

## Problema

*Trovare il coseno dell'angolo tra due vettori.*

Da

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos\vartheta \tag{6}$$

dove $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$ sono le lunghezze di $\mathbf{a}, \mathbf{b}$) e $\vartheta$ è l'angolo tra di essi. Dunque

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \tag{7}$$

In coordinate cartesiane ortogonali, se $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, la (7) si scrive:

$$\cos\vartheta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{8}$$

# Esercizio: normalizzare un vettore

**Esercizio**

*Normalizzare il vettore (non nullo)* $\mathbf{n} = (a, b, c)$. *(Cioè, dividere* $\mathbf{n}$ *per la sua lunghezza).*

Il normalizzato del vettore non nullo $\mathbf{n} = (a, b, c)$ è

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} &= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) \\ &= (\cos\varepsilon_1, \cos\varepsilon_2, \cos\varepsilon_3)\end{aligned}$$

Le componenti di $\hat{\mathbf{n}}$ sono i coseni degli angoli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ che $\hat{\mathbf{n}}$ forma con $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$: