## Funzioni convesse.

- Definizione di funzione convessa (o concava).
- Funzioni convesse derivabili.
- Interpretazione del segno della derivata seconda.
- Punti di flesso.

(Versione: 21/10/2020)

# Figure convesse

**Definizione (di figure piana convessa)**

*Un insieme di punti (figura) $S$ del piano si dice convesso se per ogni coppia di punti $A, B \in S$, l'intero segmento $AB$ è incluso in $S$.*

I convessi della retta $\mathbb{R}$ sono gli intervalli.

**Esercizio (Combinazioni lineari convesse di 2 punti = Segmento.)**

*Dati $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ i punti del segmento $[a, b]$ si scrivono*

$$sa + tb \qquad s, t \geq 0, \quad s + t = 1$$

*oppure*

$$a + t(b - a) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

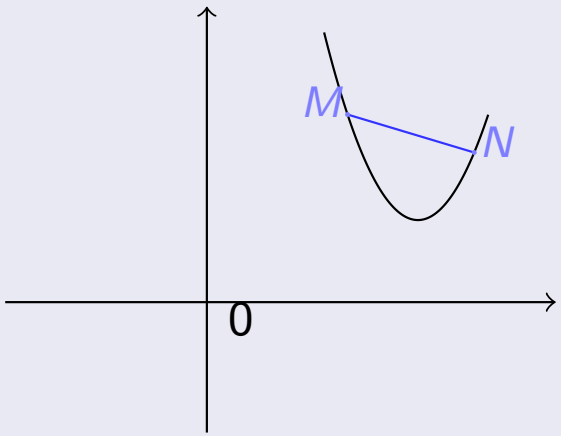
Baricentri. Se $a, m_1$ e $b, m_2$ è un sistema di due punti materiali (due punti $a, b$ con massa $m_1$ e $m_2$ rispettivamente), la coordinata del baricentro è

$$\boxed{g = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a + \frac{m_2}{m_1 + m_2} b}$$

# Funzioni convesse

## Definizione

*Una funzione $f$ definita su un intervallo $I$ si dice convessa, se per ogni $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $M = (x_1, f(x_1))$ e $N = (x_2, f(x_2))$ sta al di sopra del grafico di $f$.*




*In modo equivalente, se per ogni $x_1, x_2 \in I$ e per $0 \leq t \leq 1$ si ha:*

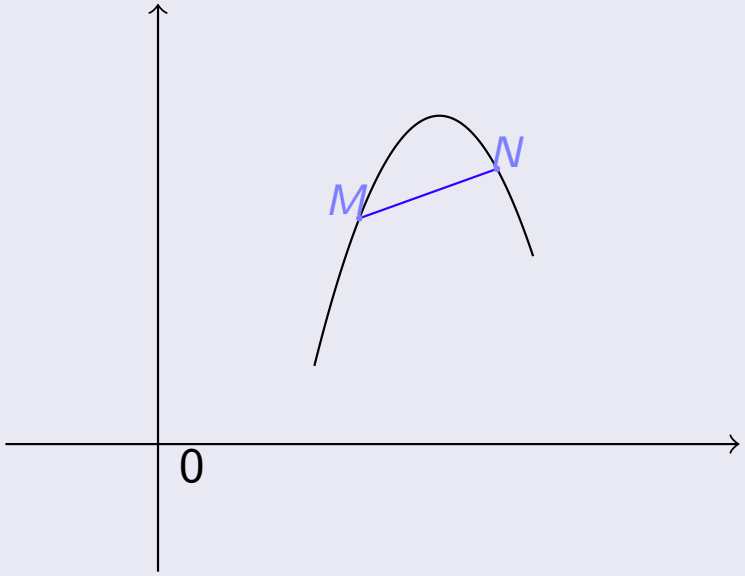
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

Una funzione $f$ è convessa se il suo epigrafico $E(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \geq f(x)\}$ è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^2$.

# Funzioni concave

## Definizione

*Una funzione $f$ definita su un intervallo aperto $I$ si dice concava, se $(-f)$ è convessa, cioè se per ogni $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $M = (x_1, f(x_1))$ e $N = (x_2, f(x_2))$ sta al di sotto del grafico di $f$.*




*In modo equivalente, se per ogni $x_1, x_2 \in I$ e per $0 \leq t \leq 1$ si ha:*

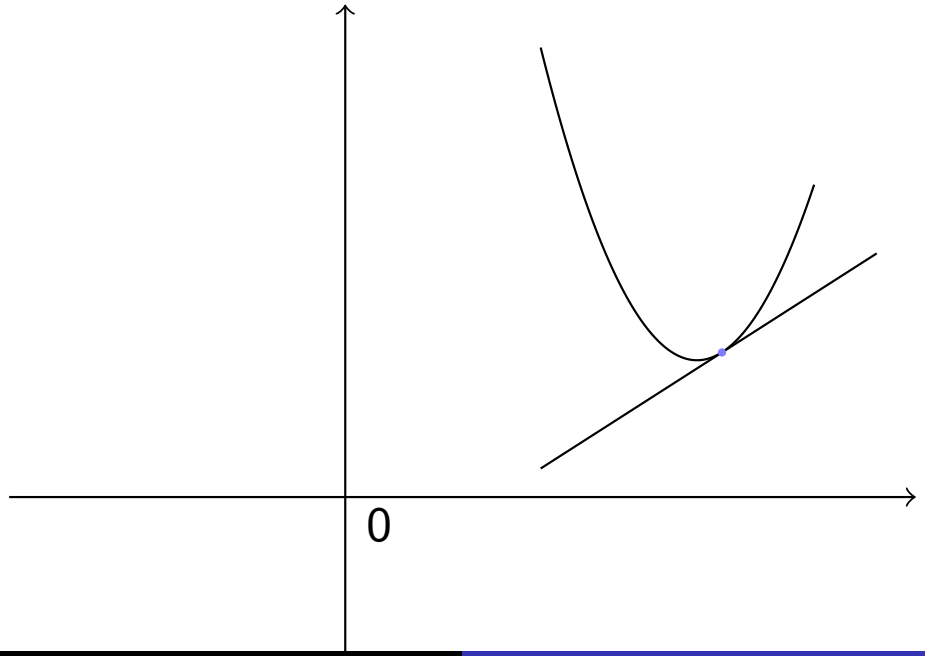
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

# Funzioni convesse derivabili

**Teorema**

*Condizione necessaria e sufficiente perché una funzione $f$, derivabile in tutto un intervallo $[a, b]$, sia convessa è che la retta tangente al grafico in un suo qualsiasi punto stia tutta al di sotto del grafico.*

(Non riportiamo la dimostrazione.)



# Interpretazione del segno della derivata seconda

## Teorema

*Supponiamo che $f$ sia derivabile due volte su un intervallo aperto $I$. Se per ogni $x \in I$ si ha $f''(x) \geq 0$, allora $f$ è convessa.*

## Dimostrazione

Siano $x_0, x \in I$. Per la formula di Taylor (con il resto di Lagrange) centrata in $x_0$, esiste $c$, compreso tra $x$ e $x_0$, per il quale vale:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Ordinata sul grafico di } f} = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Ordinata sulla retta tangente}} + \underbrace{\frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2}_{\geq 0}$$

Abbiamo così dimostrato che il grafico di $f$ sta tutto al di sopra della retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$. $\square$

# Punto di flesso

## Definizione (Punto di flesso)

*Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. Un punto $x_0$ si dice punto di flesso per $f$ se è estremo comune di due intervalli, su uno dei quali la funzione è convessa, e sull'altro concava.*

## Osservazione

Sia $f$ una funzione due volte derivabile sull'intervallo aperto $I$ e sia $x_0 \in I$. La condizione $f''(x_0) = 0$ è necessaria perché $x_0$ sia un punto di flesso per $f$, ma non sufficiente. (Esempio: $f(x) = x^4$).