Teoremi sulle funzioni continue su un intervallo

- Intervalli.
- Teorema degli zeri.
- Teorema dei valori intermedi.
- Teorema sulle funzioni invertibili su un intervallo.
- Teorema dell'inversa continua.
- Esempi di funzioni continue invertibili su intervalli.

(Versione 01/10/2020)

Intervalli di $\mathbb{R}$

Definizione (Segmento)

Dati $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$, il segmento compatto (chiuso e limitato) determinato da x e y, denotato $[x, y]$, è l'insieme:

$$[x, y] = \{t \in \mathbb{R} \mid \ x \leq t \leq y\}$$

Definizione (Intervalli di $\mathbb{R}$. Proprietà di convessità.)

Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se soddisfa:

$$(\forall x, y \in I) \quad x \leq y \implies [x, y] \subseteq I.$$

In altri termini, I è un intervallo se soddisfa:
Se I contiene due punti, allora contiene tutti i punti del segmento che li unisce.
Un singolo punto è un intervallo. Diremo che anche l'insieme vuoto è un intervallo.
Esercizio Dimostrare che l'intersezione di una famiglia (finita o infinita) di intervalli è un intervallo (magari vuoto).

Gli intervalli (non vuoti) di $\mathbb{R}$. $(a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b)$

Definizione

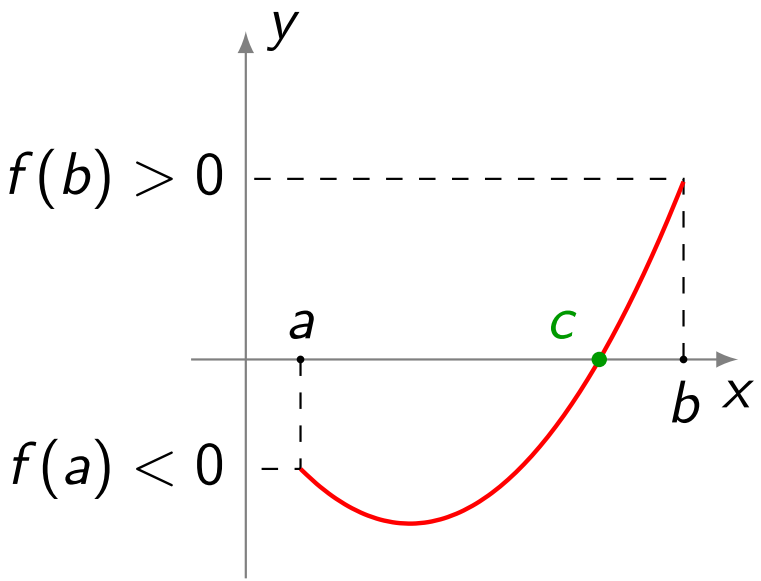
Gli intervalli (non vuoti) di $\mathbb{R}$ sono: $(a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b)$

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
2. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
5. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
6. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
7. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
8. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
9. *L'intera retta reale $\mathbb{R}$.*

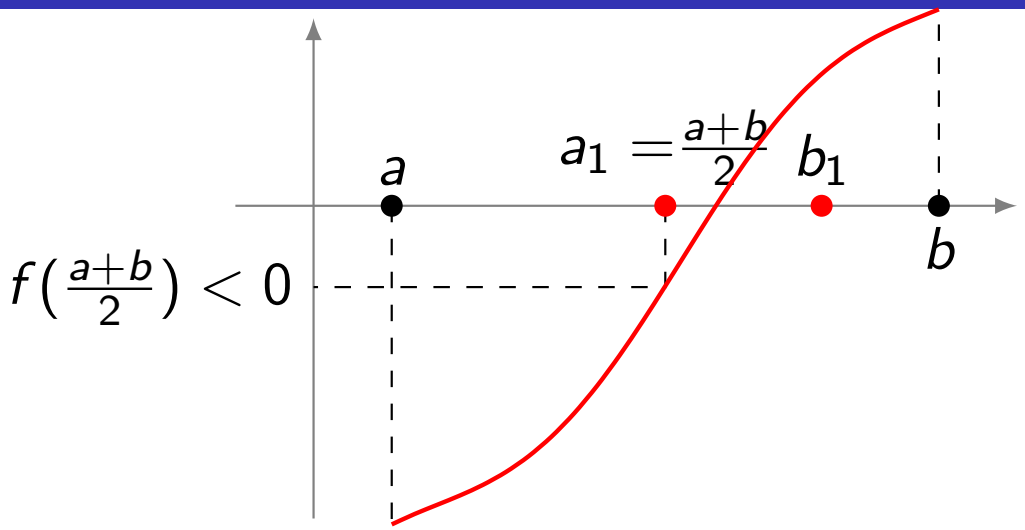
Il Teorema degli Zeri.

Teorema (Teorema degli Zeri)

Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e continua su I. Siano a, b due punti appartenenti a I, con $a < b$. Supponiamo che i valori $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segni opposti. (Vale a dire, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, o viceversa). Allora esiste (almeno) un punto $c \in (a, b)$ in cui si ha $f(c) = 0$.



Dimostrazione del teorema degli zeri. Parte 1.



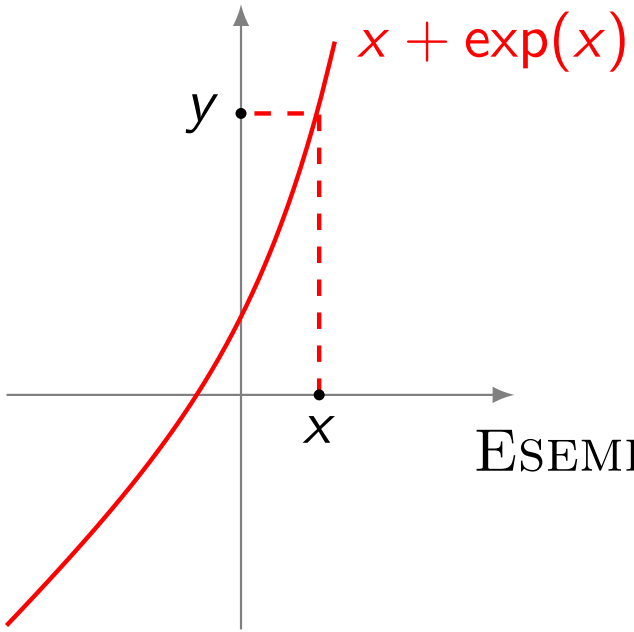
Supponiamo che il valore di f nell'estremo sinistro sia negativo, in quello destro positivo: $f(a) < 0 < f(b)$. Poniamo $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$.

Consideriamo il punto medio $\frac{a+b}{2}$. Se $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, abbiamo finito. Altrimenti, poniamo: $I_1 = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ se $f(\frac{a+b}{2}) < 0$; $I_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ se $f(\frac{a+b}{2}) > 0$. Iteriamo ora le bisezioni. Se f in uno dei punti medi si annulla, il procedimento finisce dopo un numero finito di passi. Altrimenti, costruiamo una successione di infiniti intervalli inscatolati $I_n = [a_n, b_n]$, con $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$ per ogni n. Per il teorema di Cantor sugli intervalli inscatolati, esiste un $c \in \mathbb{R}$ appartenente a tutti gli intervalli I_n.

(Continua nella slide successiva.)

Dimostrazione del teorema degli zeri. Parte 2.

Questo punto c è unico, perché le ampiezze $\frac{b-a}{2^n}$ tendono a zero. Dimostriamo che $f(c) = 0$. Poiché f è continua, preserva i limiti di successioni. Quindi, da $a_n \to c$, $b_n \to c$ segue: $f(a_n) \to f(c)$, $f(b_n) \to f(c)$. Per il teorema di permanenza del segno, $f(a_n) < 0 \implies f(c) \leq 0$, e $f(b_n) > 0 \implies f(c) \geq 0$. Quindi $f(c) = 0$. Q.E.D.



Esempio $f(x) = x + e^x$ si annulla tra -1 e 0.

Il Teorema dei Valori Intermedi)

Teorema (dei valori intermedi)

Ipotesi:

1. $I \subset \mathbb{R}$ *intervallo;* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *funzione continua su* I*;*
2. $a, b \in I; \quad a < b; \quad f(a) < f(b);$
3. $v \in \mathbb{R}$ *soddisfacente:* $\quad f(a) < v < f(b).$

Tesi:

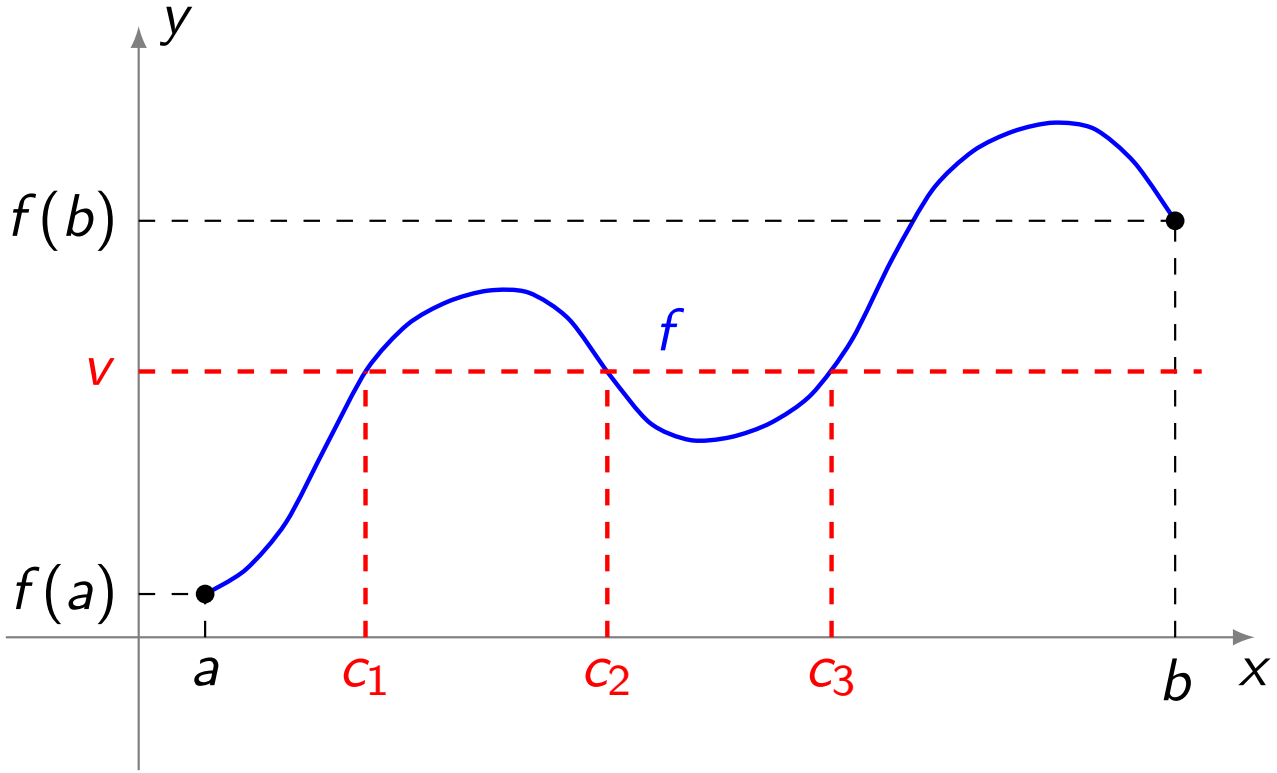
$$\exists c \in (a, b) \qquad f(c) = v$$

In breve: le funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ trasformano intervalli in intervalli:

Se $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è funzione continua su un intervallo I, la sua immagine $J = f(I)$ è un intervallo.

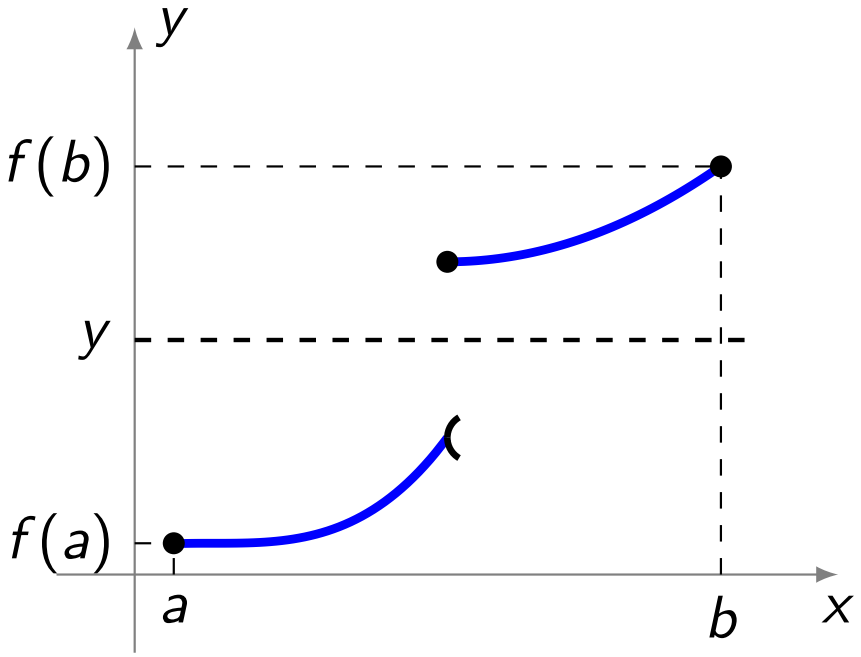
Dimostrazione (Teorema dei Valori Intermedi).

La funzione $g(x) = f(x) - v$ sull'intervallo $[a, b]$ soddisfa le ipotesi del Teorema degli Zeri. Infatti, g è continua, $g(a) = f(a) - v < 0$ e $g(b) = f(b) - v > 0$. Quindi esiste (almeno) un $c \in (a, b)$ in cui $g(c) = f(c) - v = 0$. Quindi, $f(c) = v$. Q.E.D.



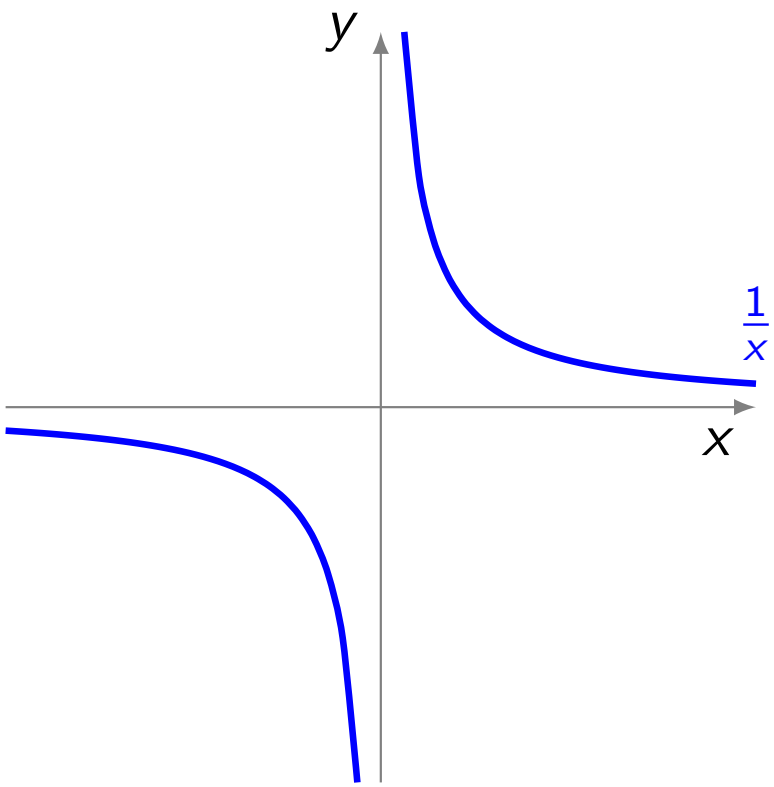
Osservazione (1)

Osservazione (1). Dalle ipotesi del teorema dei valori intermedi non si può eliminare che f sia continua. Controesempio:



Osservazione (2)

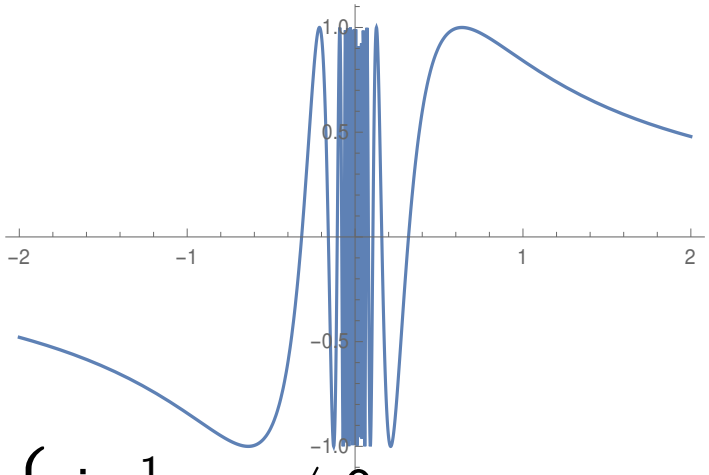
Osservazione (2). Dalle ipotesi del teorema dei valori intermedi non si può eliminare che il dominio di f sia un intervallo.
Controesempio:



La funzione $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$, è continua, assume i valori -1 e 1, ma non assume il valore 0.

Proprietà dei Valori Intermedi $\overset{?}{\Longrightarrow}$ Continuità

DOMANDA: $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$. Supponiamo che f soddisfi la Proprietà dei Valori Intermedi (di Darboux):
Per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$, f assume tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.
Possiamo concludere che f è continua? Risposta: No



$$\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio: Questa funzione soddisfa la proprietà dei valori intermedi, ma non è continua (in 0).

Funzioni monotòne e strettamente monotòne

Definizione (Funzioni monotòne)

Siano D un sottoinsieme qualunque di $\mathbb{R}$ (non richiediamo che sia un intervallo) e $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione. La funzione f si dice:

1. *crescente (in senso debole) se:*
   $(\forall x_1, x_2 \in D) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
2. *decrescente (in senso debole) se:*
   $(\forall x_1, x_2 \in D) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
3. *strettamente crescente se:*
   $(\forall x_1, x_2 \in D) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
4. *strettamente decrescente se:*
   $(\forall x_1, x_2 \in D) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
5. *monotòna se è crescente o decrescente.*
6. *strettamente monotòna se è strettamente crescente o strettamente decrescente.*

Teorema della funzione inversa. (1)

Teorema (Funzioni invertibili su intervalli (1))

IPOTESI

(a) I, J *intervalli di* $\mathbb{R}$.

(b) $I \xrightarrow{f} J$ *invertibile.*

TESI

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) f *è continua.*

(2) f *è strettamente monotòna.*

(3) f^{-1} *è strettamente monotòna.*

(4) f^{-1} *è continua.*

L'equivalenza (2) $\leftrightarrow$ (3) si dimostra molto facilmente [Esercizio].
L'implicazione (1) $\rightarrow$ (4) è nelle note alla homepage del corso.

Teorema della funzione inversa. (2)

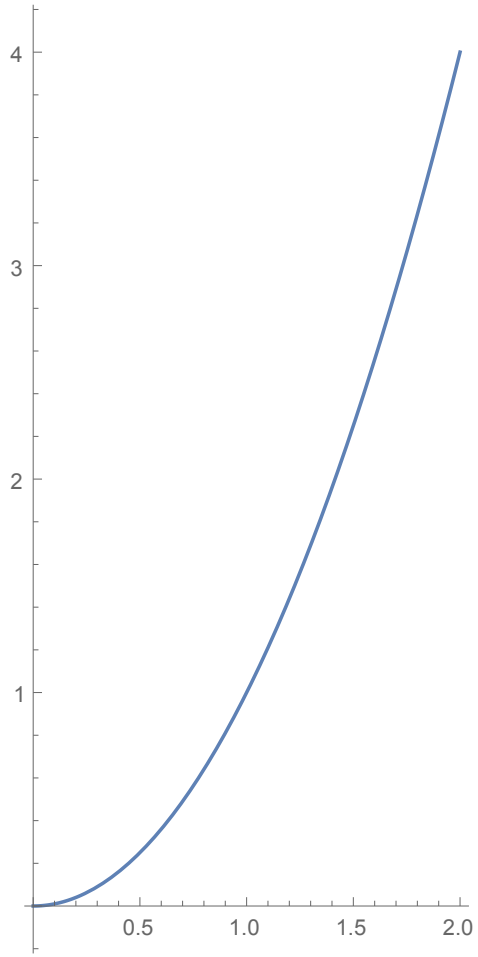
Un caso importante: Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotòna su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Per il teorema dei valori intermedi, anche $J = f(I)$ è un intervallo. Allora, la funzione (che, con un piccolo abuso di notazione, denoteremo ancora f) $I \xrightarrow{f} J$ è invertibile. (Infatti: è suriettiva, perché il codominio coincide con l'immagine, $J = f(I)$; è iniettiva, in quanto strettamente monotòna). Per il precedente teorema possiamo allora concludere che f^{-1} è continua. Riassumendo:

Teorema (Continuità della funzione inversa (2))

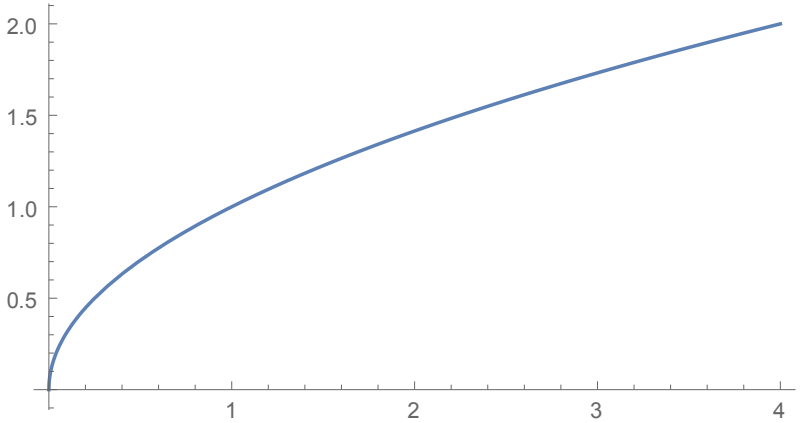
Sia I un intervallo e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotòna su I. Poniamo $J = f(I)$ (J è un intervallo di $\mathbb{R}$). Allora:

1. *La funzione $I \xrightarrow{f} J$ è invertibile;*
2. *La funzione inversa $J \xrightarrow{f^{-1}} I$ è continua.*

Esempi di funzioni inverse: $(-)^2$ e $\sqrt{(-)}$



(a) $[0,+\infty) \xrightarrow{(-)^2} [0,+\infty)$

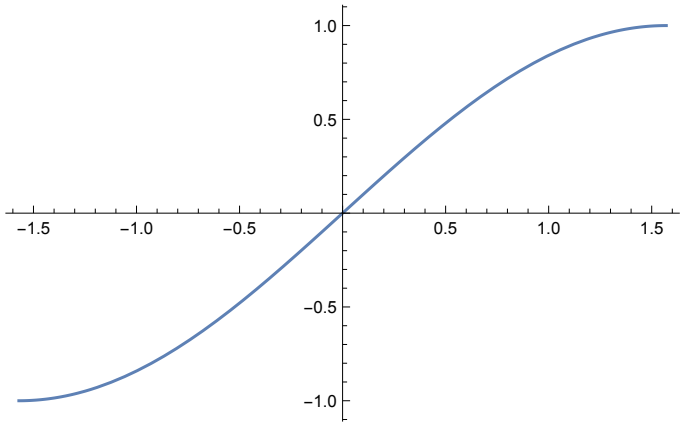


(b) $[0,+\infty) \xrightarrow{\sqrt{(-)}} [0,+\infty)$

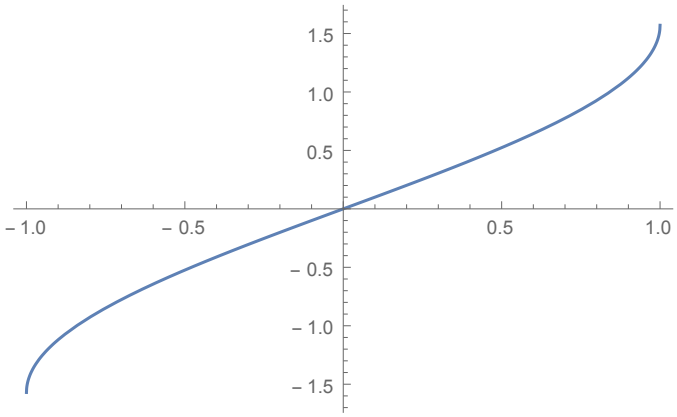
Breve commento su quadrati e radici quadrate

1) La funzione 'elevamento a quadrato'
$[0,+\infty) \overset{f=(-)^2}{\longrightarrow} [0,+\infty)$, $x \to x^2$ è continua.
2) Per il teorema dei valori intermedi, la sua immagine deve essere un intervallo J. Come possiamo determinare J? J contiene $0(=f(0))$ e non è superiormente limitato ($n^2 \to +\infty$). L'unico intervallo incluso in $[0,+\infty)$ che contiene 0 e non è limitato è lo stesso $[0,+\infty)$. Dunque, $\mathrm{Im}(f) = [0,+\infty)$.
3) Di conseguenza, per ogni $y \in [0,+\infty)$ esiste un (unico) $x \in [0,+\infty)$ tale che $x^2 = y$. Questo (unico) x si chiama radice quadrata di y: $y = \sqrt{x}$. Ad esempio, se $y = 2$, esiste un unico numero non negativo x tale che $x^2 = 2$: $x = \sqrt{2}$. In questo modo si dimostra che in $[0,+\infty)$ esistono tutte le radici quadrate dei numeri non negativi. O, più correttamente, si dimostra l'esistenza della funzione 'radice quadrata' $[0,+\infty) \overset{\sqrt{(-)}}{\longrightarrow} [0,+\infty)$

Esempi di funzioni inverse: Seno, Arcoseno.

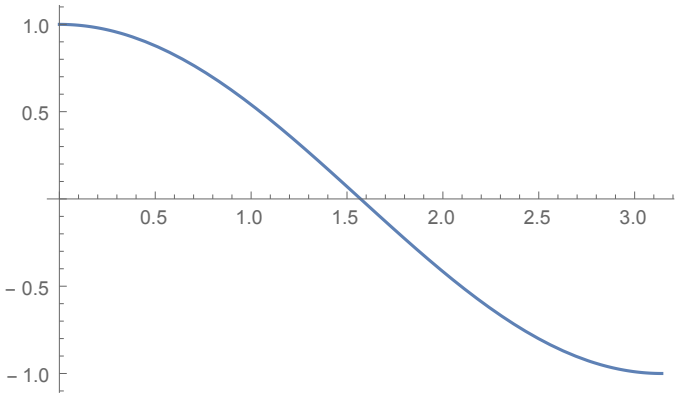


(a) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\sin} [-1, 1]$

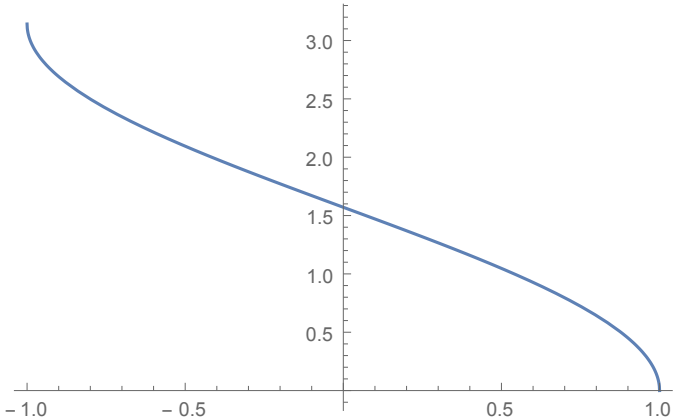


(b) $[-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Esempi di funzioni inverse: Coseno, Arcocoseno.

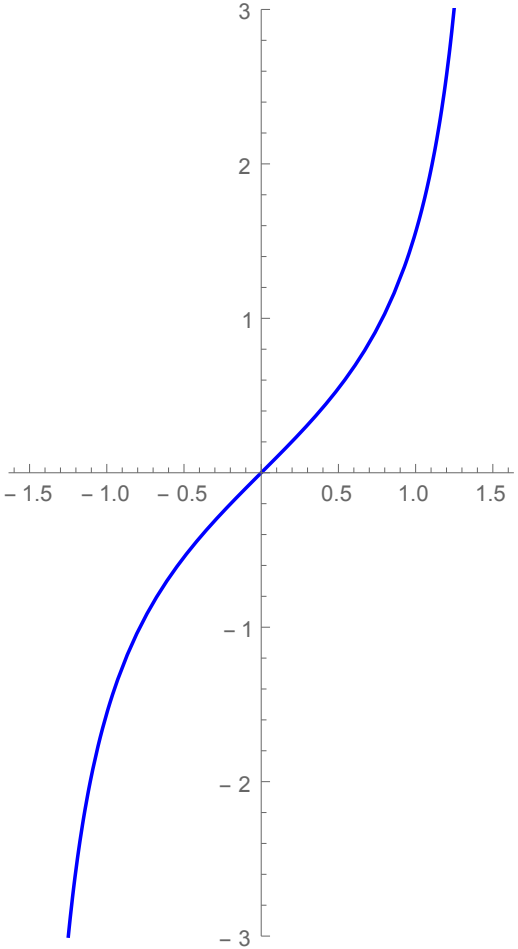


(a) $[0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$

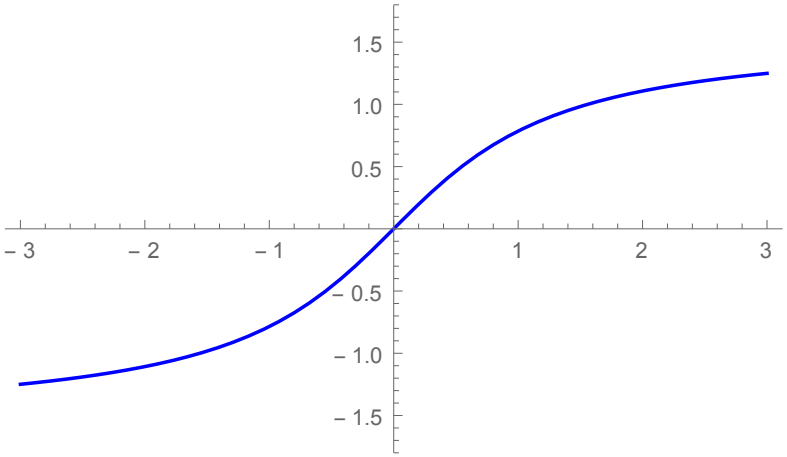


(b) $[-1, 1] \xrightarrow{\arccos} [0, \pi]$

Esempi di funzioni inverse: Tangente, Arcotangente.



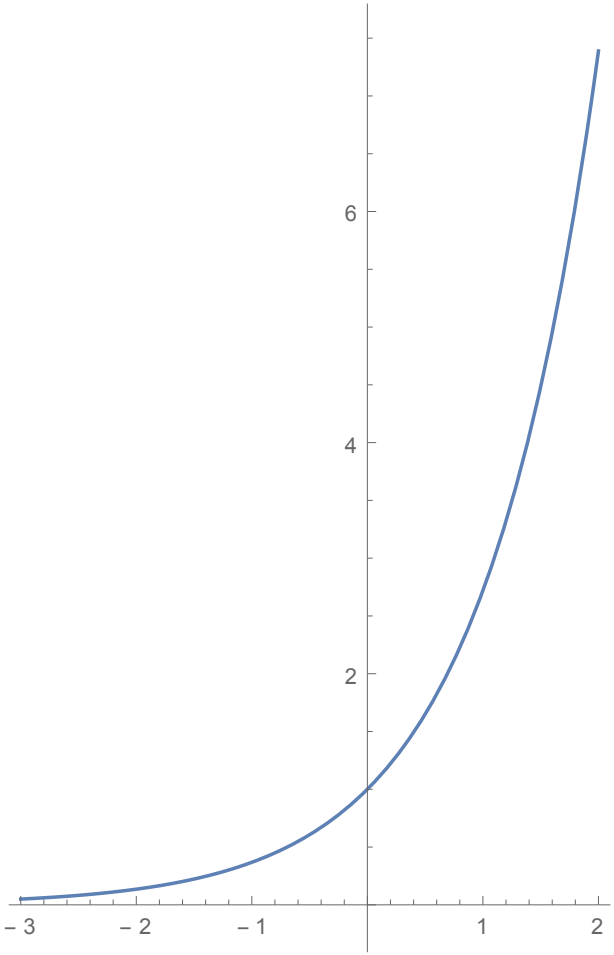
(a) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\tan} (-\infty, +\infty)$



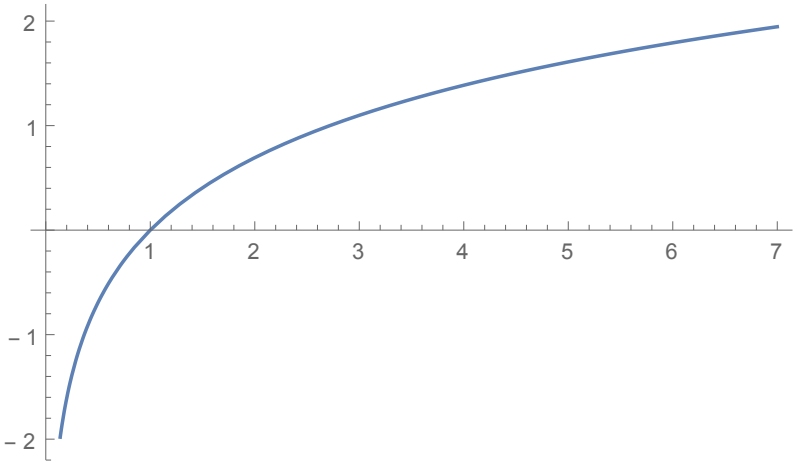
(b)

$(-\infty, +\infty) \xrightarrow{\arctan} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Esempi di funzioni inverse: $\exp_a$, $\log_a$ $(a > 1)$

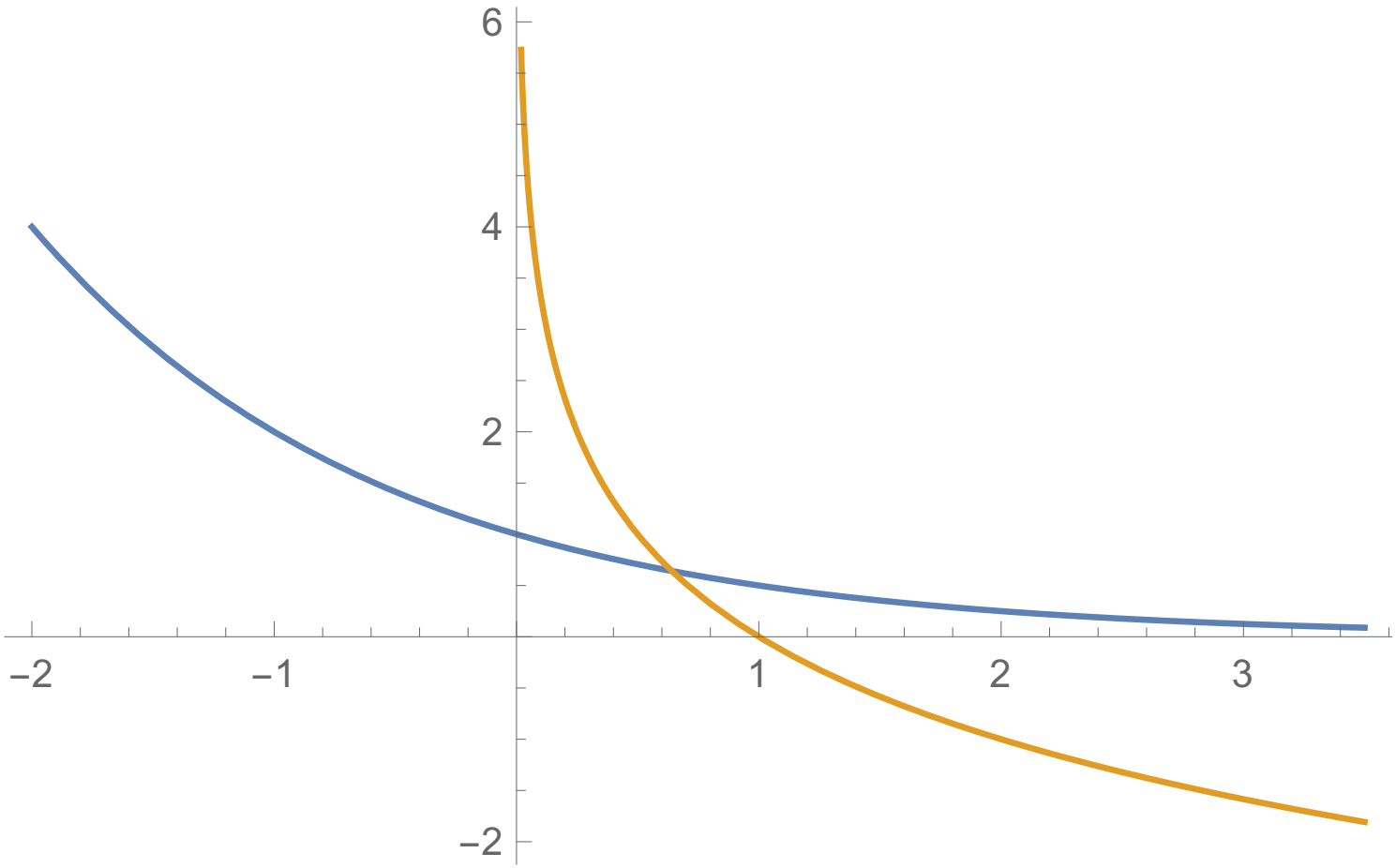


(a) $(-\infty, +\infty) \xrightarrow{\exp} (0, +\infty)$



(b) $(0, +\infty) \xrightarrow{\log} (-\infty, +\infty)$

Esempi di funzioni inverse: $\exp_a$, $\log_a$ (con $0 < a < 1$)



$(-\infty, +\infty) \xrightarrow{\exp_a} (0, +\infty)$, con $a = \frac{1}{2}$.

$(0, +\infty) \xrightarrow{\log_a} (-\infty, +\infty)$ con $a = \frac{1}{2}$.