Funzione esponenziale e funzione logaritmo

- Proprietà di omomorfismo.
- Definizione della funzione esponenziale come omomorfismo continuo (o strettamente monotòno).
- Problemi.
- La funzione logaritmo. Proprietà.

(Versione: 29/09/2021)

Per le dimostrazioni (non in programma) sulle funzioni esponenziali, due ottimi riferimenti sono:
1) Alessandro Fonda, *Appunti di Analisi 1. (Appunti aggiuntivi)*, `www.dmi.units.it/~fonda/`
2) Giovanni Prodi, *Analisi Matematica*, Bollati Boringhieri.

$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$; $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$ eccetera. Perché?

Alcune regole di conto possono sembrare strane:

$$2^0 = 1, \quad 3^{-1} = \frac{1}{3}, \qquad 3^{-2} = \frac{1}{3^2}, \qquad 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$$

Queste regole sono conseguenza della richiesta che la funzione esponenziale $x \to a^x$, estesa agli esponenti razionali, continui a soddisfare la proprietà fondamentale (detta di omomorfismo):

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a \in \mathbb{R},\ a > 0)$$

Esempio (Giustificazione di alcune regole)

- $a^3 = a^{3+0} = a^3 a^0 \implies a^0 = 1.$
- $1 = a^0 = a^{1+(-1)} = a^1 a^{-1} = a a^{-1} \implies a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
- $a^3 = a^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 \implies a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$
- $1 = a^0 = a^{2+(-2)} = a^2 a^{-2} \implies a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$

Proprietà di omomorfismo

$\mathbb{R}$ è un gruppo additivo (somma associativa, elemento neutro 0, ogni numero ha l'opposto);
$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ è un gruppo moltiplicativo (prodotto associativo, elemento neutro 1, ogni numero ha l'inverso).

Definizione (Omomorfismi)

- *Una funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$ *è un omomorfismo se:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) = f(x)f(y) \tag{1}$$

  In breve: f *"trasforma somme in prodotti".*
- *Una funzione* $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *è un omomorfismo se:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0} \qquad g(xy) = g(x) + g(y) \tag{2}$$

  In breve: g *"trasforma prodotti in somme".*

Vale il seguente:

Teorema (Omomorfismi strettamente crescenti)

Sia $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$ Esiste una, e una sola, funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f_b} \mathbb{R}_{>0}$ che soddisfa le condizioni seguenti:

1. *è un omomorfismo;*
2. *è strettamente crescente;*
3. $f_b(1) = b$.

Inoltre, questa funzione f_b è continua e invertibile.

Un teorema analogo sussiste per gli omomorfismi decrescenti:

Teorema (Omomorfismi strettamente decrescenti)

Sia $b \in \mathbb{R}$, $0 < b < 1$ *Esiste una, e una sola, funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f_b} \mathbb{R}_{>0}$ *che soddisfa le condizioni seguenti:*

1. *è un omomorfismo;*
2. *è strettamente decrescente;*
3. $f_b(1) = b$.

Inoltre, questa funzione f_b *è continua e invertibile.*

Omomorfismi continui

Si possono anche definire le funzioni esponenziali richiedendo direttamente che siano omomorfismi continui (non banali, cioè diversi dalla funzione costante $f = 1$). Le proprietà di essere strettamente monotòne e invertibili sono una conseguenza. Più precisamente, vale il seguente:

Teorema (Omomorfismi continui)

Sia $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Esiste allora un unico omomorfismo $\mathbb{R} \xrightarrow{f_b} \mathbb{R}_{>0}$ soddisfacente le seguenti condizioni:

1. *è continuo;*
2. $f_b(1) = b$.

Inoltre, questa funzione f_b è strettamente monotòna e invertibile (è un isomorfismo).

Definizione di $\exp_b$

Riassumendo, i teoremi precedenti permettono di dare questa definizione.

Definizione ($\exp_b$)

Sia $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$. La funzione esponenziale di base b, denotata $\exp_b$, è l'unico omomorfismo continuo (o, in modo equivalente, l'unico omomorfismo strettamente monotòno)

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f_b} \mathbb{R}_{>0}$$

tale che $f_b(1) = b$. Inoltre, $\exp_b$ è invertibile.

Scriveremo: $f_b(x) = \exp_b(x)$ oppure $f_b(x) = b^x \quad (x \in \mathbb{R})$.
La funzione inversa di $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp_b} \mathbb{R}_{>0}$ è la funzione $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\log_b} \mathbb{R}$.

Osservazioni sulla base b

1) Perché abbiamo fatto l'ipotesi: $b \neq 1$? Solo per evitare un caso banale: esiste anche l'esponenziale di base 1, ma si tratta della funzione costante: $1^x = 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. E' anch'esso un omomorfismo (banale). Ovviamente, non è invertibile.
2) Perché abbiamo fatto l'ipotesi: $b > 0$? Perché se f_b è un omomorfismo tale che $f_b(1) = b$, necessariamente si deva avere $b > 0$. Infatti:

$$b = f_b(1) = f_b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f_b\left(\frac{1}{2}\right) f_b\left(\frac{1}{2}\right) == \left(f_b\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 > 0$$

Applicazione dell'esponenziale. Problema 1.

Problema (Modello di assorbimento dell'intensità luminosa)

Un vetro opaco, omogeneo, dello spessore di 1 centimetro assorbe il 20% dell'intensità luminosa di un raggio di luce. Trovare la percentuale di intensità luminosa restante dopo l'attraversamento di un vetro dello stesso materiale dello spessore di x centimetri.

SOLUZIONE Poniamo: $m(x)$ = percentuale di intensità luminosa restante dopo un attraversamento di x cm. Dunque, $m(0) = 1$, $m(1) = 0,80$ (la percentuale assorbita è $20\% = 0,20$). Proprietà della funzione $m(x)$:

(a) è strettamente decrescente; (b) $m(x+h) = m(x)m(h)$

(un vetro di spessore $x+h$ si può pensare come composto di due vetri di spessori x e h saldati insieme).

Quindi $m(x)$ deve essere una funzione esponenziale. La base è $m(1) = 0,8$. Quindi $m(x) = (0,8)^x$.

Applicazione dell'esponenziale. Problema 2.

Problema (Decadimento radioattivo)

Determinare la quantità di una sostanza radioattiva che resta (cioè non decade) dopo un tempo t.

SOLUZIONE $f(t)$: frazione di materiale che non decade dopo un tempo t. M_0 : massa iniziale di materiale radioattivo all'istante $t = 0$. $M(t) = M_0 f(t)$: massa restante dopo un tempo t. Cos'è $M(t+h)$? Ci sono due risposte, entrambe corrette:
(i) $M(t+h) = M_0 f(t+h)$; (ii) $M(t+h) = M(t)f(h) = M_0 f(t)f(h)$.
Allora, $f(t+h) = f(t)f(h)$. Dunque, $f(t)$ è strettamente decrescente e soddisfa la proprietà di omomorfismo. Dunque: $f(t) = b^t$, con $0 < b < 1$. Sia T il tempo di dimezzamento:

$$M(T) = M_0 b^T = \frac{1}{2} M_0 \implies b^T = \frac{1}{2} \implies b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}.$$ Dunque,

$$M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

Applicazione dell'esponenziale. Problema 3.

Problema (Denaro con interesse)

Supponiamo che, ricevuta in prestito una somma x di denaro al tempo $t_0 = 0$, dopo un tempo t si debba restituire una somma $m(t)x$. (Supporremo che $m(t)$ dipenda solo dalla durata t del prestito). Come dovrà essere fatta quasta funzione $m(t)$?

SOLUZIONE $m(t)$ dovrà essere una funzione strettamente crescente. Se all'istante 0 èstata data in prestito una somma x, la somma da restituire dopo un tempo $t + h$ si può calcolare in due modi: (i) $m(t + h)x$; (ii) $m(t)m(h)x$. Pertanto, $m(t + h) = m(t)m(h)$. Dunque, la funzione $t \to m(t)$, strettamente crescente e soddisfacente la proprietà di omomorfismo, deve essere una funzione esponenziale: $m(t) = b^t$ per un opportuno $b > 1$. Posto $m(1) = b = 1 + i > 1$, il numero i è detto tasso di interesse. Sarà dunque: $m(t) = (1 + i)^t$.

Una formula importante: $(b^x)^y = b^{xy}$

Per ogni $b > 0$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

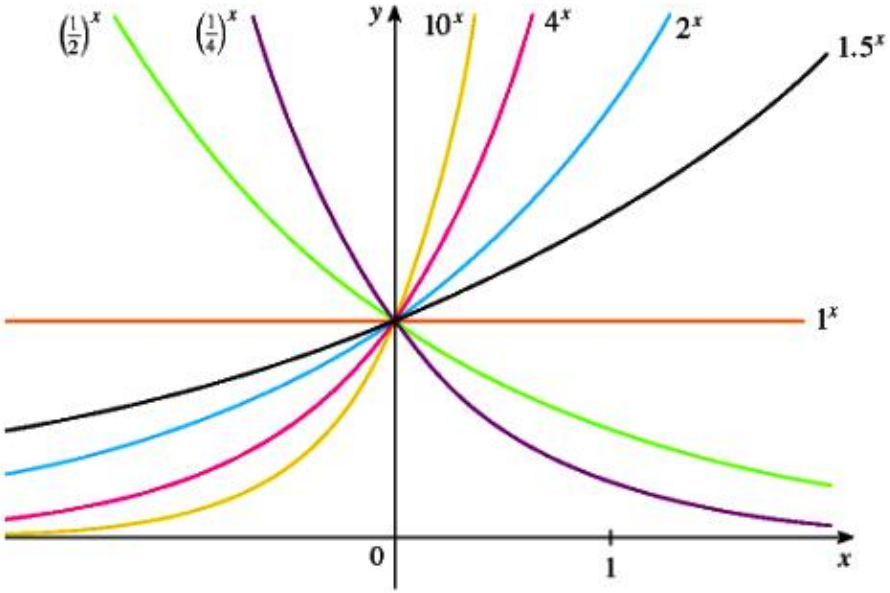
$$(b^x)^y = b^{xy}$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $b > 1$. Per $x = 0$ la formula è vera. Fissiamo $x \neq 0$ e consideriamo le due funzioni $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$

$$y \longmapsto (b^x)^y, \qquad y \longmapsto b^{xy}$$

Sono entrambe crescenti se $x > 0$; entrambe decrescenti se $x < 0$. Per $y = 1$ assumono lo stesso valore. Entrambe sono omomorfismi. Allora, per il risultato di unicità del teorema precedente, esse coincidono. (Dimostrazione analoga per il caso $0 < b < 1$; il caso $b = 1$ è banale.)

Grafici degli esponenziali



L'esponenziale è:

- Strettamente crescente se $b > 1$;
- Strettamente decrescente se $0 < b < 1$;
- Costante (uguale a 1) se $b = 1$. (Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $1^x = 1$.)

Esercizi

Esercizio 1 Dimostrare che i grafici di

$$f(x) = b^x \qquad\qquad g(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$$

sono simmetrici rispetto all'asse y.

Esercizio 2 Studiare i grafici di $f(x) = c \cdot a^{kx} + d$, $c, a, k, d \in \mathbb{R}$.

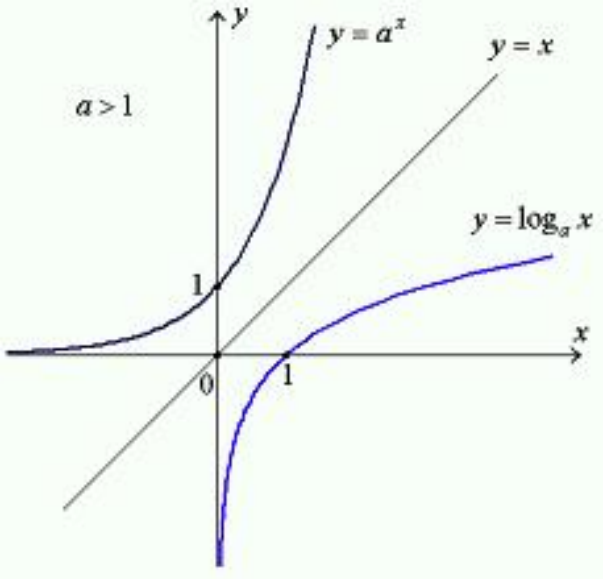
La funzione logaritmo $\log_b$

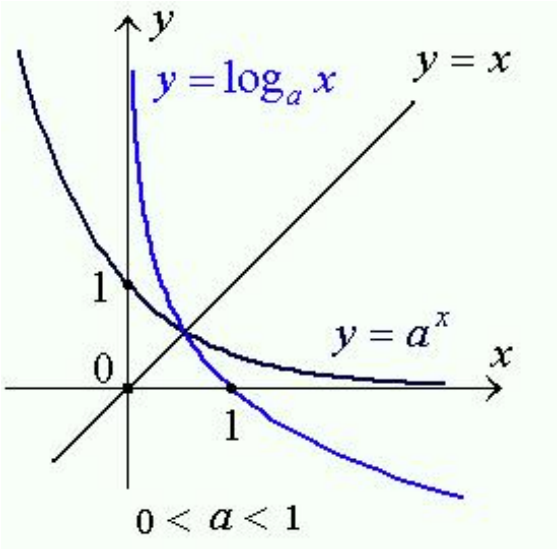
Definizione ($\log_b$)

La *funzione logaritmo in base b* $(b > 0,\ b \neq 1)$

$$\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\log_b} \mathbb{R} \tag{3}$$

è l'inversa della funzione esponenziale $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp_b} \mathbb{R}_{>0}$.





Proprietà di $\log_b$

Dalle proprietà di $\exp_b$ seguono le proprietà di $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\log_b} \mathbb{R}$.

Esercizio

1. *(Proprietà di omomorfismo) Per ogni* $x, y > 0$,
$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$
2. *Il logaritmo* $\log_b$ *è una funzione continua (per il teorema sull'inversa continua) e strettamente monotòna (crescente, se* $b > 1$*; decrescente se* $0 < b < 1$*).*
3. *(Logaritmo di una potenza) Se* b, c *sono numeri reali positivi e* x *è un numero reale qualunque,*
$$\log_b(c^x) = x \log_b c$$